Подгорнов М.Д. Модель системы массового обслуживания с оператором, работающим «ТОЧНО-В-СРОК» // Международный журнал информационных технологий и энергоэффективности. – 2024. – Т. 9 № 11(49) с. 105–110

ОТКРЫТАЯ НАУКА
издательство

Международный журнал информационных технологий и энергоэффективности

Сайт журнала: http://www.openaccessscience.ru/index.php/ijcse/

УДК 004.942

МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОПЕРАТОРОМ, РАБОТАЮЩИМ «ТОЧНО-В-СРОК»

Подгорнов М.Д.
ФГБОУ ВО "УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ", Ульяновск, Россия, (432017, Ульяновская область, город Ульяновск, ул. Льва Толстого, д. 42), e-mail: maksimka_7373@mail.ru

В работе развивается семимартингальный (траекторный) подход к математическому описанию и моделированию систем массового обслуживания (СМО) «точно-в-срок». Рассмотрены две модели СМО с оператором, работающим «точно-в-срок». Первая – с отказами в обслуживании, вторая – с бесконечной очередью. Показан переход от математической модели к итерационным формулам, по которым проводится имитационное моделирование.

Ключевые слова: Система массового обслуживания, семимартингальное описание, точно-в-срок, точечный процесс, компенсатор, имитационное моделирование.

THE QUEUING SYSTEM MODEL WITH A JUST-IN-TIME OPERATOR

Podgornov M.D.
ULYANOVSK STATE UNIVERSITY, Ulyanovsk, Russia, (432017, Ulyanovsk region, Ulyanovsk city, Lva Tolstoy str., 42), e-mail: maksimka_7373@mail.ru

The paper develops a semi-martingale (trajectory) approach to the mathematical description and modeling of queuing systems (CMS) "just-in-time". Two models of SMO with a just-in-time operator are considered. The first is with denials of service, the second is with an endless queue. The transition from a mathematical model to iterative formulas is shown, according to which simulation modeling is carried out.

Keywords: Queuing System, semi-martingale description, just-in-time, point process, compensator, simulation modeling.

Введение

Современные системы массового обслуживания играют ключевую роль в обеспечении эффективного взаимодействия между услугами и потребителями. В условиях растущей конкуренции и повышенных требований клиентов важность оптимизации процессов обслуживания становится особенно актуальной. Одним из подходов к повышению эффективности таких систем является внедрение модели, основанной на принципах *точно-в-срок,* также известные как *JIT* (just-in-time). Эта модель позволяет минимизировать время ожидания, снизить затраты и повысить уровень удовлетворенности клиентов за счет более точного планирования и управления ресурсами (см., например, работы [1-2]).

Стоит отметить, что для описания систем массового обслуживания *точно-в-срок* невозможно использовать методы, применяемые для описания производственных систем. Это связано с высокой частотой случайных событий в моделях СМО и соответствующих им процессах. По этой причине, описание систем массового обслуживания *точно-в-срок* представляет все больший интерес.

Из-за низкого уровня развития математических, и в частности стохастических, моделей систем массового обслуживания *точно-в-срок* на данный момент, их описание и моделирование является крайне актуальным. Применение таких моделей крайне важно для решения задач оптимального управления, поскольку они дают возможность эффективно распределять системные ресурсы и разрабатывать оптимальные стратегии планирования. Целью исследования является разработка стохастического описания СМО с оператором, работающим *точно-в-срок*, подходящего как для аналитических методов, так и для компьютерного моделирования.

В работе изучается две модели простой СМО в семимартингальных терминах для точечных процессов [3-5]. Первая – с отказами в обслуживании, вторая – с очередью. Здесь же допускаются некоторые предположения о процессах, присущих реальным системам.

Постановка задачи

Рассмотрим одноканальную СМО, в которую поступают заявки одного типа. Интенсивность поступления заявок определяется параметром $\lambda > 0$. С момента начала обслуживания заявки, оператор должен завершить ее обработку за определенный отрезок времени, определяемый параметром $\tau > 0$, или, говоря иначе, *точно-в-срок.*

Для заявок, пришедших на обслуживание в момент времени, когда оператор занят, предлагается два варианта действий:

1. Заявка получает отказ в обслуживании, если оператор занят в момент ее поступления, и покидает систему (Рисунок 1).

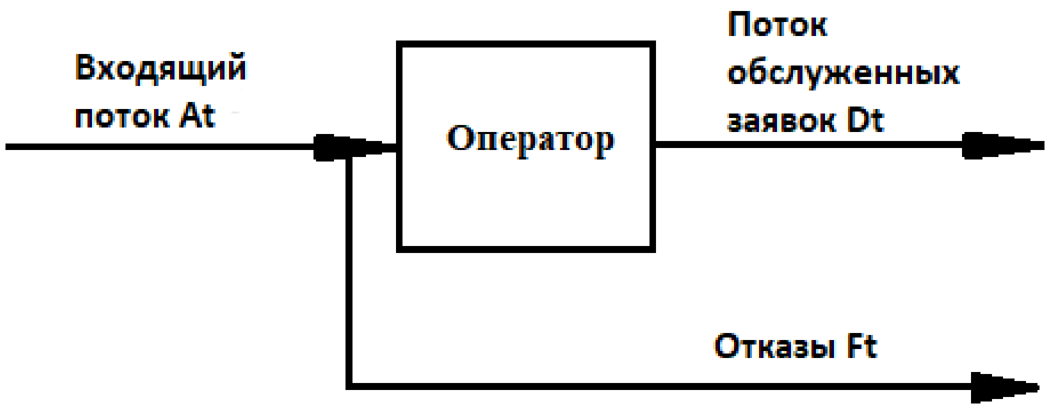

Рисунок 1. - Схема СМО с отказами

2. Заявка встает в очередь и ожидает обслуживания (Рисунок 2).

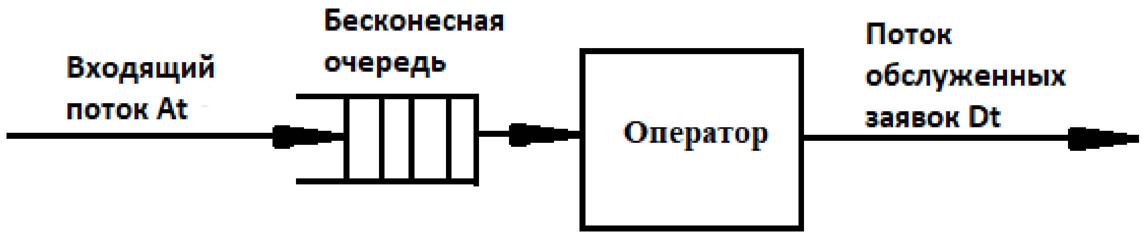

Рисунок 2.- Схема СМО с бесконечной очередью

Математическая модель

Для описания работы систем введем считающие процессы A, D, где $A = (A_t)_{t\geq 0}$ – число заявок, поступивших в СМО за время $t \geq 0$, $A_0 = 0$, $D = (D_t)_{t\geq 0}$ – число обслуженных заявок в СМО за время $t \geq 0$, $D_0 = 0$. Точечные процессы A и D определяются своими компенсаторами $\tilde{A} = (\tilde{A}_t)_{t\geq 0}$ и $\widetilde{D} = (\widetilde{D}_t)_{t\geq 0}$ [4]:

$$A_t = \tilde{A}_t + m_t^A, \qquad (1)$$

$$D_t = \widetilde{D}_t + m_t^D, \qquad (2)$$

где $\tilde{A}$ и $\widetilde{D}$ – неубывающие предсказуемые процессы, m^A и m^D – мартингалы.

Для рассматриваемой в данной работе системы компенсатор процесса $A = (A_t)_{t\geq 0}$ имеет следующий вид:

$$\tilde{A}_t = \lambda t, \qquad (3)$$

где $\lambda > 0$ – интенсивность поступления заявок.

Компенсатор для процесса $D = (D_t)_{t\geq 0}$ определяется соотношением:

$$\widetilde{D}_t = \int_0^t \mu_s \; ds\,, \qquad (4)$$

где μ_t – интенсивность обслуживания оператора. Определять ее будем следующим соотношение:

$$\mu_t = \frac{1}{t_t^o - t} \cdot I(t_t^o > 0). \qquad (5)$$

Здесь $I(\cdot)$ – индикаторная функция, t_t^o – время, к которому оператор стремиться завершить обработку текущей заявки. Отметим, что в любой момент времени $t \geq 0$, $\mu_t \geq 0$.

1. Опишем сначала уравнение изменения t_t^o для системы с отказами в обслуживании. Оно будет иметь следующий вид:

$$dt_t^o = (t + \tau) \cdot I(A_t - D_t - F_t = 0) dA_t - t_t^o dD_t, \qquad (6)$$

где F_t – количество заявок, получивших отказ в обслуживании в момент времени $t \geq 0$, $F_0 = 0$. Определяться оно будет соотношением:

$$dF_t = I(A_t - D_t - F_t > 0) dA_t, \qquad (7)$$

т.е. заявка будет получать отказ в обслуживании, если в момент ее прихода ($dA_t = 1$) оператор обрабатывает другую заявку.

Логика построения уравнения (6) следующая: параметр t_t^o принимает значение равное сумме текущего значения времени и параметра τ, если в момент прихода новой заявки ($dA_t =$

1) оператор свободен (определяется индикатором), и обнуляется, когда оператор заканчивает обслуживание текущей заявки ($dD_t = 1$).

2. Аналогично опишем уравнения для системы с очередью:

$$dt_t^o = (t+\tau)\cdot I(A_t - D_t - F_t = 0)dA_t + (t+\tau-t_t^o)\cdot I(q_t > 0)dD_t - t_t^o(q_t = 0)dD_t, \quad (8)$$

где $q_t -$ количество заявок в очереди в момент времени $t \geq 0$, $q_0 = 0$. Для параметра q_t можно написать следующее балансовое уравнение:

$$dq_t = I(A_t - D_t - q_t > 0)dA_t - I(q_t > 0)dD_t, \quad (9)$$

т.е. очередь будет увеличивается на единицу, если в момент прихода новой заявки ($dA_t = 1$) оператор занят, и уменьшаться на единицу, если в момент окончания обслуживания текущей заявки ($dD_t = 1$) очередь не пуста($q_t > 0$).

Логика построения уравнения (8) такова. Во-первых, параметр t_t^o принимает значение равное сумме текущего значения времени и параметра τ, если в момент прихода новой заявки ($dA_t = 1$) оператор свободен, либо если в момент окончания обслуживания текущей заявки ($dD_t = 1$) в очереди есть заявки ($q_t > 0$). Во-вторых, обнуляется, если в момент окончания обслуживания текущей заявки ($dD_t = 1$) очередь пуста ($q_t > 0$).

Итерационные формулы

Выведем формулы, необходимые для имитационного моделирования СМО. На стохастическом базисе $B = (\Omega, \mathcal{F}, F = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ из формул (1)-(9) можно получить следующие инфинитезимальные соотношения:

$$P\{A_{t+\Delta} - A_t = 1|\mathcal{F}_t\} = \lambda\cdot\Delta + o(\Delta), \quad (10)$$

$$P\{D_{t+\Delta} - D_t = 1|\mathcal{F}_t\} = \mu_t\cdot\Delta + o(\Delta). \quad (11)$$

Формулы (10)-(11) позволяют, основываясь на понятии геометрической вероятности, провести имитационное моделирование. А именно, введя дискретизацию (шаг по времени) Δ из условия $\lambda\cdot\Delta \ll 1, \mu_t\cdot\Delta \ll 1$, получим следующие итерационные формулы (для вычисления значений процессов в момент времени $t + \Delta$ через значения процессов в момент t):

$$A_{t+\Delta} = A_t + \delta(\lambda), \quad (12)$$

$$D_{t+\Delta} = D_t + \delta(\mu_t), \quad (13)$$

где $\delta(\gamma) = \begin{cases} 1, & \text{с вероятностью } \gamma\cdot\Delta, \\ 0, & \text{с вероятностью } 1-\gamma\cdot\Delta. \end{cases}$

Для системы с отказами формулы имеют вид:

$$F_{t+\Delta} = F_t + I(A_t - D_t - F_t > 0)\Delta A_t, \quad (14)$$

$$t_{t+\Delta}^o = t_t^o + (t+\tau)\cdot I(A_t - D_t - F_t = 0)\Delta A_t - t_t^o\Delta D_t. \quad (15)$$

Формулы для системы с очередью:

$$q_{t+\Delta} = q_t + I(A_t - D_t - q_t > 0)\Delta A_t - I(q_t > 0)\Delta D_t, \quad (16)$$

$$t_{t+\Delta}^o = t_t^o + (t+\tau)\cdot I(A_t - D_t - F_t = 0)\Delta A_t + (t+\tau-t_t^o)\cdot I(q_t > 0)\Delta D_t - -t_t^o\cdot I(q_t = 0)\Delta D_t. \quad (17)$$

Здесь $\Delta A_t = A_{t+\Delta} - A_t, \Delta D_t = D_{t+\Delta} - D_t$.

Результаты компьютерного моделирования

Практическая реализация СМО осуществлена с помощью языка программирования высокого уровня C# в среде разработки Visual Studio 2019. На Рисунках 3,4 представлены результаты моделирования систем при параметрах $\tau = 1, \lambda = 1$ и времени моделирования $T = 10$.

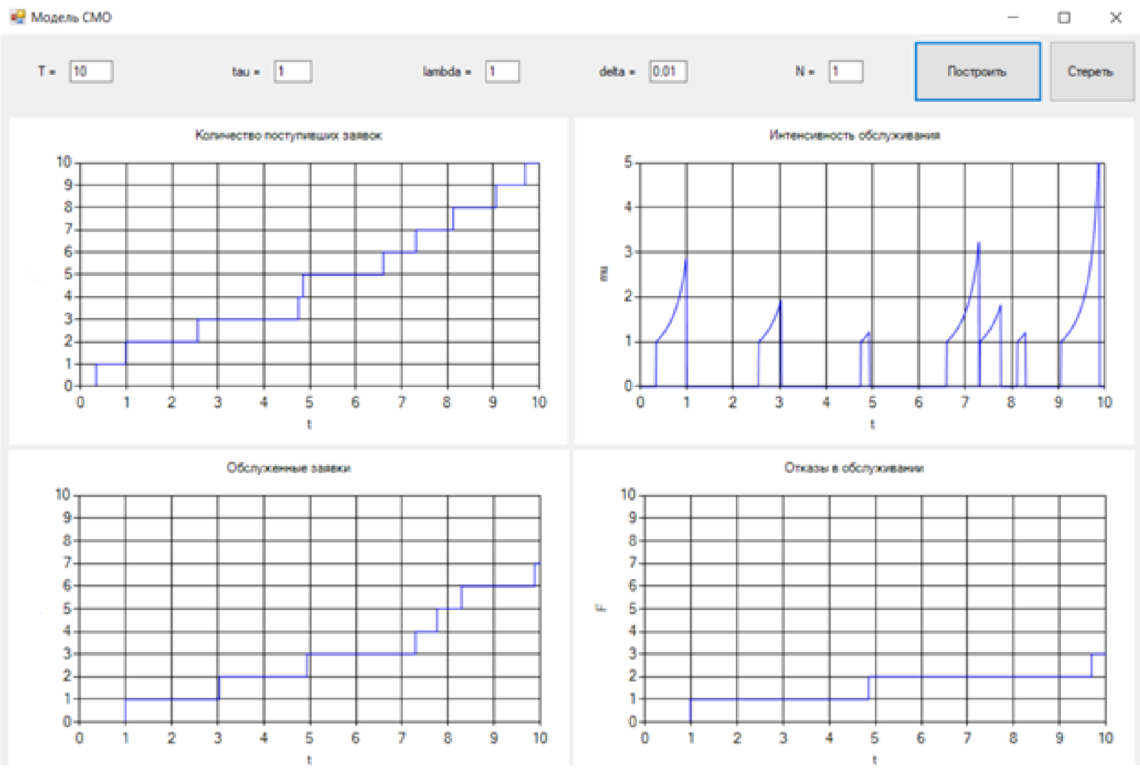

Рисунок 3. - Модель СМО с отказами

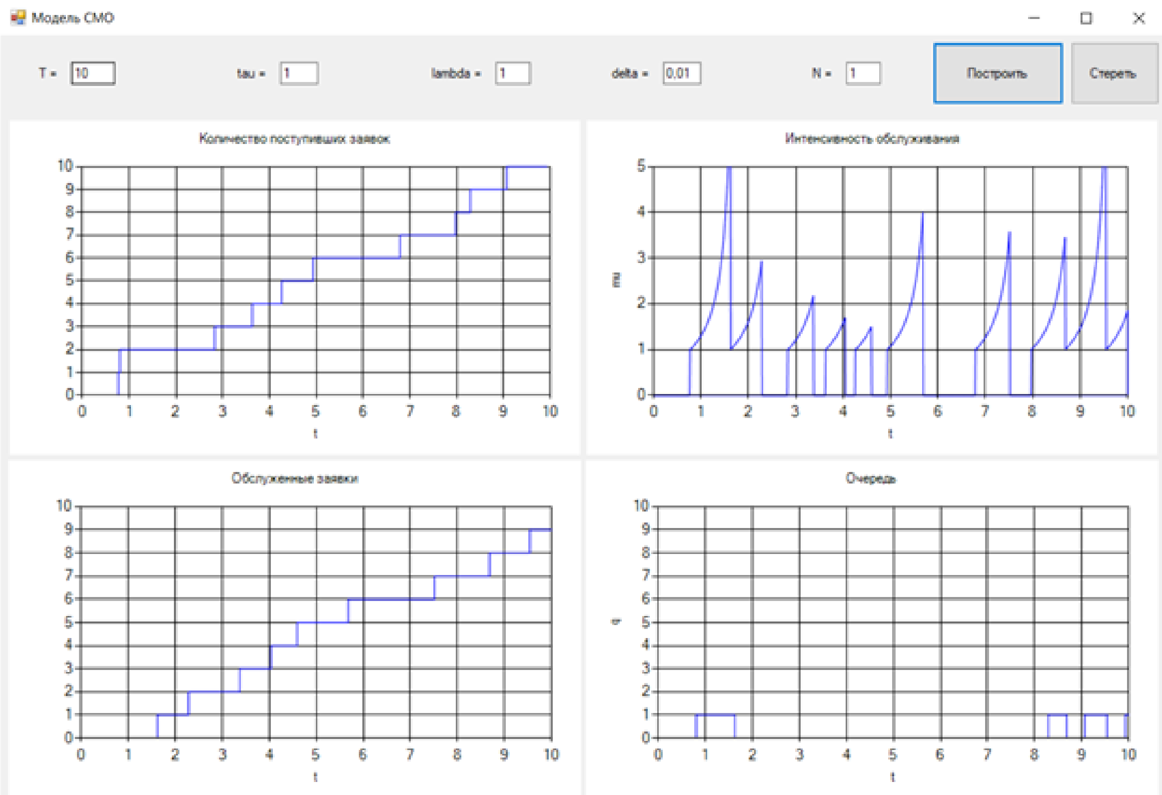

Рисунок 4. - Модель СМО с очередью

Результаты моделирования показывают, что обе системы корректно справляются с поставленными задачами, оператор обрабатывает заявки точно в срок.

Заключение

В результате выполнения данной работы была построена математическая модель системы массового обслуживания с оператором, работающими *точно-в-срок* в семимартингальных терминах. Показан переход от математической модели к итерационным формулам, по которым было проведено имитационное моделирование.

Список литературы

1. Butov A.A., Kovalenko A.A. Stochastic models of simple controlled systems just-in-time // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физикоматематические науки. 2018, т. 22, №. 3, с. 518-531.
2. Бутов А.А. Оценивание параметров распределенных продуктивных систем, работающих по принципу «точно в срок» // Автомат. и телемех. 2020, № 3, с.14–27.
3. Бородин А.Н. Случайные процессы: Учебник. Спб.: Изд-во «Лань», 2013.
4. Бутов, А.А. Теория случайных процессов и её дополнительные главы: учеб. пособие. Ч. 1. Введение в стохастическое исчисление. Ульяновск : УлГУ, 2016
5. Бутов, А.А. Теория случайных процессов и её дополнительные главы: учеб. пособие. Ч. 2. Случайное блуждание, винеровский процесс, стохастический интеграл, диффузионные процессы. Ульяновск : УлГУ, 2021

References

1. Butov A.A., Kovalenko A.A. Stochastic models of simple controlled systems just-in-time // Bulletin of the Samara State Technical University. Series: Physical and Mathematical Sciences. 2018, vol. 22, No. 3, pp. 518-531.
2. Butov A.A. Estimation of parameters of distributed productive systems operating on the principle of "just in time" // Automaton. and telemech. 2020, No. 3, pp.14-27.
3. Borodin A.N. Random processes: Textbook. St. Petersburg: Publishing house "Lan", 2013.
4. Butov, A.A. Theory of Random Processes and Its Additional Chapters. allowance. Part 1. Introduction to Stochastic Calculus. Ulyanovsk : Ulyanovsk State University, 2016
5. Butov, A.A. Theory of Random Processes and Its Additional Chapters. allowance. Part 2. Random walk, Wiener process, stochastic integral, diffusion processes. Ulyanovsk : Ulyanovsk State University, 2021