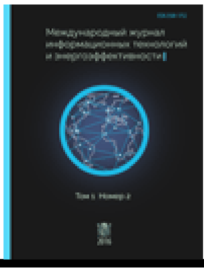
Подгорнов М.Д. Модель системы массового обслуживания «ПОЧТИ-ТОЧНО-В-СРОК»// Международный журнал информационных технологий и энергоэффективности. – 2024. – Т. 9 № 10(48) с. 59–64

ОТКРЫТАЯ НАУКА
издательство

Международный журнал информационных технологий и энергоэффективности

Сайт журнала: http://www.openaccessscience.ru/index.php/ijcse/



УДК 004.942

МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ «ПОЧТИ-ТОЧНО-В-СРОК»

Подгорнов М.Д.
ФГБОУ ВО "УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ", Ульяновск, Россия, (432017, Ульяновская область, город Ульяновск, ул. Льва Толстого, д. 42), e-mail: maksimka_7373@mail.ru

В работе развивается семимартингальный (траекторный) подход к математическому описанию и моделированию систем массового обслуживания (СМО) «почти-точно-в-срок». Рассмотрена модель СМО «почти-точно-в-срок». Предложена стратегия по выбору количества обслуживающих каналов. Показан переход от математической модели к итерационным формулам, по которым проводится имитационное моделирование.

Ключевые слова: Система массового обслуживания, семимартингальное описание, точно-в-срок, точечный процесс, компенсатор, имитационное моделирование.

THE QUEUING SYSTEM «ALMOST-JUST-IN-TIME» MODEL

Podgornov M.D.
ULYANOVSK STATE UNIVERSITY, Ulyanovsk, Russia, (432017, Ulyanovsk region, Ulyanovsk city, Lva Tolstoy str., 42), e-mail: maksimka_7373@mail.ru

The paper develops a semi-martingale (trajectory) approach to the mathematical description and modeling of closed queuing systems "almost-just-in-time". The queuing systems model "almost-just-in-time" is considered. A strategy for choosing the number of service channels is proposed. The transition from a mathematical model to iterative formulas, which are used for simulation, is shown.

Keywords: Queuing System, semi-martingale description, just-in-time, point process, compensator, simulation modeling.

Введение

В работе рассматривается достаточно новая для теории массового обслуживания система *почти-точно-в-срок*.

На сегодняшний день концепция организации процессов выполнения в системах *точно-в-срок* достаточно хорошо известна и применяется во различных областях. В пример можно привести производственные системы *точно-в-срок*, также известные как *JIT* (just-in-time), методы компиляции *точно-в- срок* в программировании, а также образовательные стратегии организации обучения *точно-в-срок* (см., например, работы [1-2]).

Как правило, для описания производственных систем используются детерминистические модели, так как в подобных системах методы *точно-в-срок* рассматриваются для решения логистических задач. Однако, данные методы не подходят для других (отличных от логистики) областей применения, в частности, в моделировании систем массового обслуживания (СМО). Учитывая крайне высокую частоту случайных событий в таких системах и соответствующих им процессах, формальное описание и моделирование

СМО по принципу *точно-в-срок* представляют крайне высокий интерес, в особенности, если обратить внимание на их производственную актуальность и отсутствие соответствующих стохастических моделей. Стоит отметить, что, из-за своей специфики, СМО не может справиться с задачей *точно-в-срок*. Поэтому, в данном контексте, будет корректнее использовать термин «почти-точно-в-срок».

На сегодняшний день математические модели для систем массового обслуживания *точно-в-срок*, в частности стохастические, развиты крайне слабо. Однако, применение таких моделей необходимо при решении задач оптимального управления, так как они позволяют оптимизировать распределения системных ресурсов и реализовать оптимальную стратегию планирования достаточно произвольной стохастической системы. Цель исследования заключается в разработке стохастического описания СМО *почти-точно-в-срок*, которое было бы подходящим как для аналитических методов, так и для компьютерного моделирования.

В работе изучается модель простой СМО *почти-точно-в-срок*, в семимартингальных терминах для точечных процессов [3-5]. Управление осуществляется посредством изменения числа обслуживающих каналов. Здесь же допускаются некоторые предположения о процессах, присущих реальным системам.

1. Постановка задачи

Рассмотрим СМО, в которой имеется стартовый пул заявок в количестве $n > 0$ (Рисунок 1). Помимо изначального набора заявок, в процессе работы в систему поступают новые того же типа. Интенсивность поступления заявок определяется параметром $\lambda > 0$. Отметим, что момент их поступление ограничен во времени параметром $T > 0$. Данный параметр определяет момент времени, к которому система должна стремиться обработать все находящиеся в ней заявки.

Как было отмечено ранее, управление системой осуществляется изменением количества каналов обслуживания, которое определяется параметром $r \geq 0$. Каждый из операторов имеет одинаковую квалификацию со средней интенсивностью обслуживания $\mu > 0$.

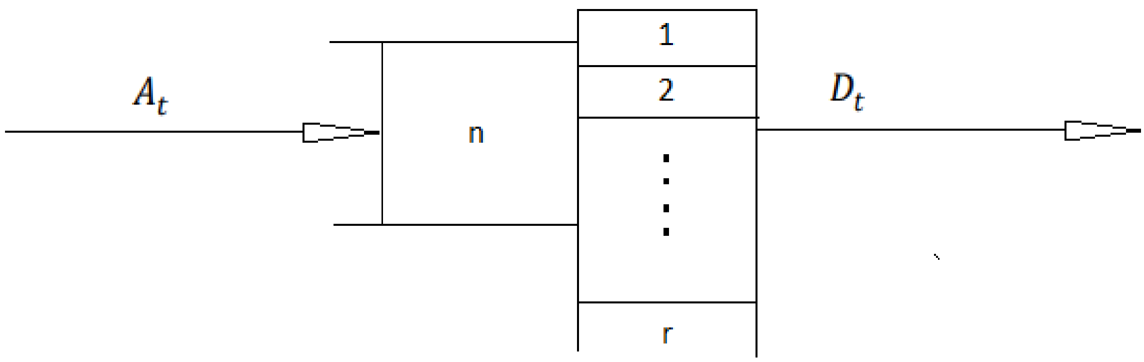


Рисунок 1. - Схема СМО.

2. Математическая модель

Для описания работы системы введем считающие процессы A, D, где $A = (A_t)_{t \geq 0}$ – число заявок, поступивших в СМО за время $t \geq 0$, $A_0 = 0$, $D = (D_t)_{t \geq 0}$ – число обслуженных заявок в СМО за время $t \geq 0$, $D_0 = 0$. Точечные процессы A и D определяются своими компенсаторами $\tilde{A} = (\tilde{A}_t)_{t\geq 0}$ и $\widetilde{D} = (\widetilde{D}_t)_{t\geq 0}$ [4]:

$$A_t = \tilde{A}_t + m_t^A, \tag{1}$$

$$D_t = \widetilde{D}_t + m_t^D, \tag{2}$$

где $\tilde{A}$ и $\widetilde{D}$ − неубывающие предсказуемые процессы, m^A и m^D − мартингалы.

Для рассматриваемой в данной работе системы компенсатор процесса $A = (A_t)_{t\geq 0}$ имеет следующий вид:

$$\tilde{A}_t = \int_0^t \lambda \cdot I(s < T)\, ds, \tag{3}$$

где $\lambda > 0,\ I(\cdot)$ − индикаторная функция.

Компенсатор для процесса $D = (D_t)_{t\geq 0}$ определяется соотношением:

$$\widetilde{D}_t = \int_0^t \mu \cdot r_s\ ds\,. \tag{4}$$

Обозначим ξ_t − число заявок в СМО в момент времени $t \geq 0,\ r_t$ − количество обслуживающих каналов в СМО в момент времени $t \geq 0$.

Для ξ_t в момент времени $t \geq 0$ можно написать следующее основное балансовое соотношение:

$$\xi_t = n + A_t - D_t. \tag{5}$$

Для выбора количества каналов обслуживания r_t в СМО в момент времени $t \geq 0$ выбрана следующая стратегия:

$$r_t = \min(r_t^m, \xi_t) \cdot I(t < T) + \xi_t \cdot I(t \geq T), \tag{6}$$

где r_t^m − оптимальное количество каналов, при котором СМО стремиться завершить свою работу в момент времени T. Определять его будем соотношением, которое имеет следующий вид:

$$r_t^m = \left[\frac{\xi_t}{\mu\cdot(T-t)}\right]. \tag{7}$$

Логика управления системой такова. В начале определяется оптимальное количество каналов r_t^m по формуле (7). Однако, следует отметить, что количество операторов не может превышать количества заявок в системе ξ_t, поэтому необходимо найти минимум между этими значениями. Так же очевидно, что если система преодолела момент времени T, к которому стремилась, то максимально быстро она завершит свою работу, если количество обслуживающих каналов r_t будет равняться количеству заявок, оставшихся в системе.

3. Итерационные формулы

Из формул (1)-(7) можно получить следующие инфинитезимальные соотношения:

$$P\{A_{t+\Delta} - A_t = 1 | \mathcal{F}_t\} = \lambda \cdot \Delta \cdot I(t < T) + o(\Delta), \tag{8}$$

$$P\{D_{t+\Delta} - D_t = 1 | \mathcal{F}_t\} = r_t \cdot \mu \cdot \Delta + o(\Delta). \tag{9}$$

Введя дискретизацию (шаг по времени) Δ из условия $\lambda \cdot \Delta \ll 1, n\mu \cdot \Delta \ll 1$, получим следующие итерационные формулы:

$$A_{t+\Delta} = A_t + \delta(\lambda \cdot I(t < T)), \tag{10}$$

$$D_{t+\Delta} = D_t + \delta(r_t \cdot \mu), \tag{11}$$

где $\delta(\gamma) = \begin{cases} 1, & \text{с вероятностью } \gamma \cdot \Delta, \\ 0, & \text{с вероятностью } 1 - \gamma \cdot \Delta. \end{cases}$

Далее пересчитывается число заявок в СМО в момент $t + \Delta$: $\xi_{t+\Delta} = n + A_{t+\Delta t} - D_{t+\Delta}$. Затем применяем найденное значение $\xi_{t+\Delta}$ к формулам (6),(7) и находим значение

$r_{t+\Delta}$ — количество обслуживающих каналов в СМО в момент времени $t+\Delta$. После происходит переход к следующей итерации (шаг от $t+\Delta$ к $t+2\Delta$).

4. Результаты компьютерного моделирования

Практическая реализация СМО осуществлена с помощью языка программирования высокого уровня C# в среде разработки Visual Studio 2019.

На рисунке 2 представлен результат моделирования 1000 траекторий при следующих заданных значениях: $T = 10, n = 100,\ \lambda = 5, \mu = 5$.

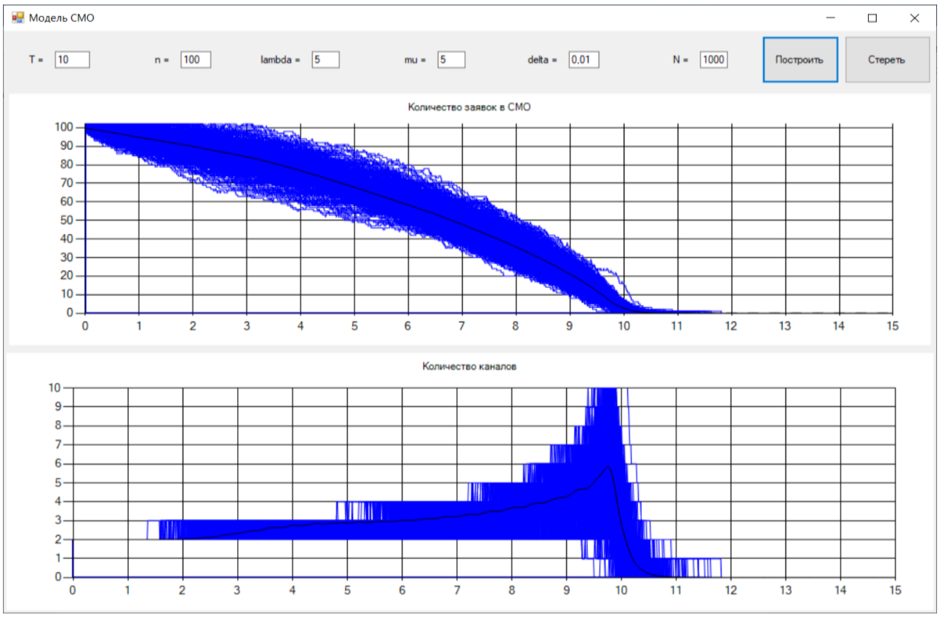


Рисунок 2. - Результат моделирования

Результат моделирования показывает, что система корректно справляется со своими функциями и стремится закончить свою работу в момент времени T. Количество каналов изменяется в соответствии с нагрузкой.

Для сравнительного анализа проведем второе моделирование, в котором увеличим в двое стартовый пул заявок в количестве n (Рисунок 3).

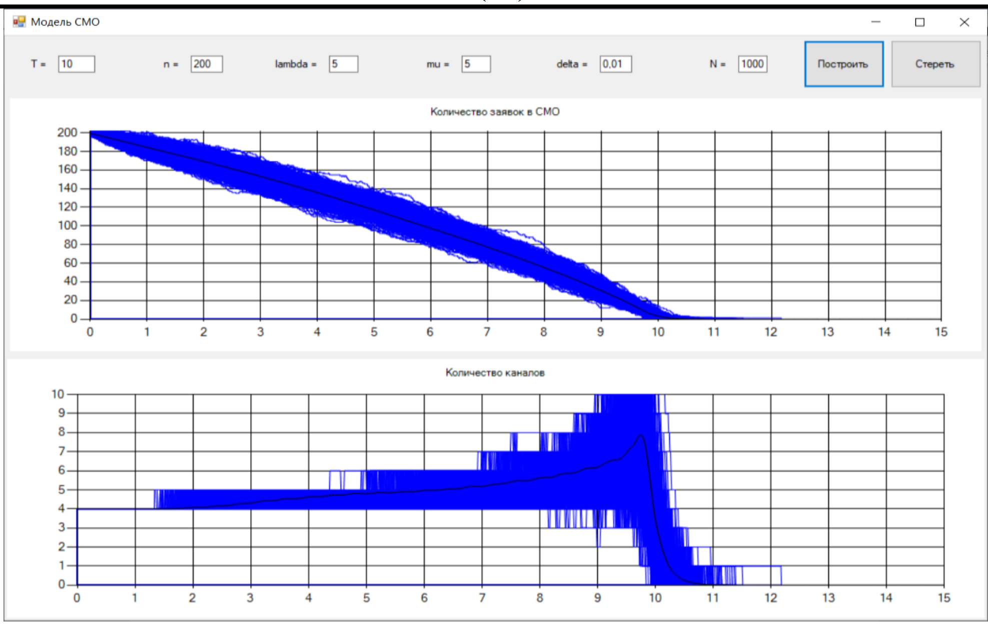


Рисунок 3. - Результат моделирования при увеличении n

Серия экспериментов показывает, что модель справляется с поставленными задачами не зависимо от стартовых значений.

Заключение

В результате выполнения данной работы была построена математическая модель системы массового обслуживания *почти-точно-в-срок* в семимартингальных терминах. Показан переход от математической модели к итерационным формулам. Проведено имитационное моделирование, показывающее возможность оценки отклонения реального времени остановки системы от заданного.

Список литературы

1. Butov A.A., Kovalenko A.A. Stochastic models of simple controlled systems just-in-time // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физикоматематические науки. 2018, т. 22, №. 3, с. 518-531.
2. Бутов А.А. Оценивание параметров распределенных продуктивных систем, работающих по принципу «точно в срок» // Автомат. и телемех. 2020, № 3, с.14–27.
3. Бородин А.Н. Случайные процессы: Учебник. Спб.: Изд-во «Лань», 2013.
4. Бутов, А.А. Теория случайных процессов: учеб. пособие / А.А. Бутов, К.О. Раводин. Ульяновск: УлГУ, 2009. 62 с.
5. Бутов, А.А. Теория случайных процессов и её дополнительные главы: учеб. пособие. Ч. 1. Введение в стохастическое исчисление. Ульяновск : УлГУ, 2016. – 48 с

References

1. Butov A.A., Kovalenko A.A. Stochastic models of simple controlled systems just-in-time // Bulletin of the Samara State Technical University. Series: Physical and Mathematical Sciences. 2018, vol. 22, No. 3, pp. 518-531.

2. Butov A.A. Estimation of parameters of distributed productive systems operating on the principle of "just in time" // Automaton. and telemech. 2020, No. 3, pp.14-27.
3. Borodin A.N. Random processes: Textbook. St. Petersburg: Publishing house "Lan", 2013.
4. Butov, A.A. Theory of random processes : textbook. the manual / A.A. Butov, K.O. Ravodin. Ulyanovsk: UlSU, 2009. 62 p.
5. Butov, A.A. Theory of random processes and its additional chapters: textbook. manual. Part 1. Introduction to stochastic calculus. Ulyanovsk : UlSU, 2016. – 48 p.