



Международный журнал информационных технологий и энергоэффективности

Сайт журнала: <http://www.openaccessscience.ru/index.php/ijcse/>



УДК 62-503.55

## СРАВНЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗЫ О НАЛИЧИИ ТРЕНДА ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЗАДАЧЕ ЭКСТРЕМАЛЬНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

**Рябчиков М.Ю., Рябчикова Е.С., Курбетьев К.В.**

*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова, Россия (455000, г. Магнитогорск, пр. Ленина, 38); e-mail: mr\_mgn@mail.ru*

В статье предложено использование в системах экстремального регулирования статистических критериев наличия тренда в средних значениях исследуемого процесса. Из-за большого количества данных критериев необходим их сравнительный анализ применительно к данной задаче. Рассмотрены потенциально наиболее мощные критерии, произведена оценка их мощности относительно гипотезы о наличии линейного тренда для различного числа точек исследуемого сигнала и различных видов распределений случайной составляющей сигнала. В результате сравнительного анализа определен лучший с точки зрения использования в системах управления критерий – критерий инверсий.

Ключевые слова: система экстремального регулирования, критерий наличия тренда в средних значениях.

## COMPARISON OF STATISTIC TEST FOR VERIFICATION OF THE HYPOTHESIS ON THE EXISTENCE OF TREND APPLIED TO THE PROBLEM OF OPTIMUM CONTROL

**Ryabchikov M.Yu., Ryabchikova E.S., Kurbetyev K.V.**

*Federal State Educational Institution of Higher Education Nosov Magnitogorsk State Technical University, Russia (455000, Magnitogorsk, Lenin Avenue, 38); e-mail: mr\_mgn@mail.ru*

The article suggests the use of statistic test for the existence of a trend in the mean values of the process under study in systems of extreme regulation. Because of the large number of these tests, their benchmarking study is needed in relation to this task. Potentially the most powerful tests were considered, their power was evaluated with respect to the hypothesis of a linear trend for a different number of points of the signal and various types of distributions of the random component of the signal. As a result of the comparative analysis, the best test regarding the use in control systems was the inversion test.

Key words: optimum control system, test for the existence of a trend in mean values.

Существуют объекты управления с подверженной дрейфу экстремальной статической характеристикой, функционирующие в условиях действия стохастических возмущений. Для управления такими объектами могут использоваться системы экстремального регулирования. Такие системы могут быть построены на основе поисковых алгоритмов,

использующих статистически обоснованные способы определения моментов достижения экстремума и направления движения к экстремуму [1-3].

Одним из таких способов, подходящих для поиска экстремума, является критерий оценки наличия тренда в зависимости выходного (оптимизируемого) параметра от входного. Способ предполагает исследование последовательности измерений входного  $X(\tau)$  и выходного параметра  $Y(\tau)$  за интервал времени до текущего момента. На основе этих временных рядов формируется ряд  $Y(X)$ , который исследуется на трендовую составляющую. В области экстремума тренд отсутствует, что позволяет снижать нагрузку на исполнительное устройство.

Отсортировав ряд значений  $Y$  по возрастанию или убыванию  $X$ , получаем последовательность  $\bar{Y}$ . Для последовательности выдвигается гипотеза о случайности, которая принимается или не принимается в зависимости от значения статистического критерия. По наличию тренда (отсутствию случайности) и его направлению можно судить о текущем положении относительно экстремума.

В контексте использования в экстремальных регуляторах данный способ пока не был широко исследован. Тем не менее, применение в регуляторах критериев наличия тренда может оказаться целесообразным.

Особенность применения критериев тренда к зависимости  $Y(X)$  заключается в том, что по мере приближения к экстремуму  $dY/dX$  стремится к нулю, что усиливает влияние возмущений, имеющих случайную природу. В таком случае эффективность работы системы экстремального регулирования определяется динамикой изменения вероятности успешной идентификации наличия тренда (мощности) по мере приближения к экстремуму.

Существует множество критериев наличия тренда. Это затрудняет прямое исследование систем управления на их основе. Необходимо предварительное исследование, сравнительный анализ и обоснование применения того или иного критерия при управлении конкретными объектами.

Наиболее полный перечень критериев наличия тренда в русскоязычной литературе по математической статистике приведен в [4]. Однако в этом труде приводится довольно общее описание критериев, отсутствует сравнение их мощностей и не оговариваются области применения и предпосылки для корректности статистических выводов для каждого из критериев. Более подробный анализ критериев приводится в [5]. В труде приведены мощности многих критериев относительно гипотезы о наличии линейного и синусоидального трендов, оговорены достоинства и недостатки различных критериев. При этом в исследованиях предполагается, как правило, нормальный закон распределения случайной составляющей сигнала. В то же время, в ряде случаев закон распределения случайной составляющей может быть отличен от нормального. Кроме того, при оценках мощности относительно гипотезы о наличии линейного тренда, применялись только две гипотезы с различными коэффициентами наклона прямых, что позволяет грубо оценить изменение мощности с изменением коэффициента, но не позволяет подробно увидеть эту зависимость.

Учитывая вышесказанное, представляет интерес изучение потенциально наиболее мощных критериев (в соответствии с [5]) на чувствительность к закону распределения

случайной составляющей, а также исследовать зависимости мощности критериев относительно гипотезы о наличии линейного тренда от коэффициента наклона прямых.

В данной статье представлены результаты исследований критериев автокорреляции, инверсий и Кокса-Стюарта. Для каждого из критериев исследовалась зависимость мощности критерия относительно линейного тренда от коэффициента наклона прямой для разного числа точек и случайных возмущений различных типов.

Исследуемый сигнал представляет собой сумму линейной трендовой составляющей и шума:

$$X_i = at_i + \xi_i, \quad (1)$$

где  $\xi_i$  - случайная составляющая,  $t_i = (i-1)\Delta t$  - время на  $i$ -м шаге,  $\Delta t$  - шаг по времени,  $a$  – коэффициент наклона трендовой составляющей.

В работе исследовалась мощность критериев при нормальном, равномерном и логнормальном законах распределения случайной составляющей. Производилось моделирование при различном количестве точек: 10, 30 и 60. Пример исследуемого сигнала при разных значениях  $a$  для числа точек  $N = 60$  и шага по времени  $\Delta t = 0,1$ с приведен на рисунке 1.

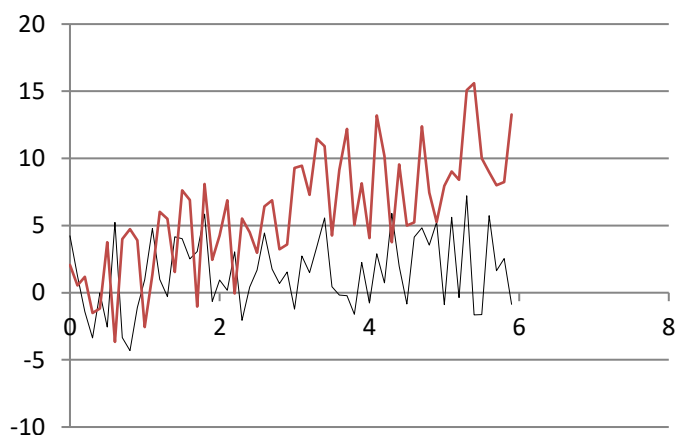


Рисунок 1 - Пример исследуемого сигнала при  $a = 0,5$  и  $a = 2$

При использовании критерия автокорреляции рассчитывается статистика:

$$r_{1,n} = \frac{n \sum_{i=1}^{n-1} X_i X_{i+1} - (\sum_{i=1}^n X_i)^2 + n X_1 X_n}{n \sum_{i=1}^n X_i^2 - (\sum_{i=1}^n X_i)^2} \quad (2)$$

При справедливости проверяемой гипотезы (случайный сигнал) статистика  $r_{1,n}$  распределена асимптотически нормально с математическим ожиданием и дисперсией:

$$E[r_{1,n}] = -\frac{1}{n-1}, \quad D[r_{1,n}] = \frac{n(n-3)}{(n+1)(n-1)^2} \quad (3)$$

Нормализованная статистика для данного критерия:

$$r_{1,n}^* = \frac{r_{1,n} - E[r_{1,n}]}{\sqrt{D[r_{1,n}]}} \quad (4)$$

Статистикой в критерии инверсий является общее число инверсий  $I$  в исследуемой выборке. Инверсия присутствует, если за значением  $X_i$  в выборке следует меньшее по величине  $X_j$ , т.е.  $X_i > X_j, i < j \leq n$ . Математическое ожидание и дисперсия соответственно имеют вид:

$$E[I] = \frac{n(n-1)}{4}, D[I] = \frac{2n^3 + 3n^2 - 5n}{72} \quad (5)$$

Нормализованная статистика:

$$I^* = \frac{I - E[I]}{\sqrt{D[I]}} \quad (6)$$

Статистика при  $n < 30$  имеет существенную дискретность.

При использовании критерия Кокса-Стюарта применяется статистика:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n/2} (n - 2i + 1)h_{1,n-i+1}, \quad (7)$$

где  $h_{i,j} = 1$  при  $X_i > X_j$  и  $h_{i,j} = 0$  при  $X_i \leq X_j$ .

Математическое ожидание и дисперсия нормализованной статистики:

$$E[S_1] = \frac{n^2}{8}, D[S_1] = \frac{n(n^2 - 1)}{24}. \quad (8)$$

Выражения для нормализованной статистики имеет вид:

$$S_1^* = \frac{S_1 - E[S_1]}{\sqrt{D[S_1]}} \quad (9)$$

В качестве оценки мощности критерия относительно гипотезы о наличии линейного тренда использовалось отношение успешных попыток определения тренда к общему числу испытаний при фиксированном критическом значении критерия. Такой метод не является математически строгим, однако при достаточно большом количестве испытаний можно обоснованно сравнивать критерии по мощности. В исследованиях моделировалось 10 тыс. сигналов для каждого значения коэффициента наклона трендовой составляющей.

Помимо оценки мощности, представляет интерес оценка фактической вероятности ошибки первого рода, а точнее – отличие этой вероятности от вероятности, предполагаемой асимптотическим распределением статистики при заданном критическом значении критерия. Оценка фактического уровня значимости осуществлялась аналогично оценке мощности: доля верных подтверждений гипотезы о случайности к общему числу испытаний при генерировании случайного сигнала в большом количестве опытов. Число опытов при оценке достигнутого уровня значимости равно 50 тыс. Критическое значение критерия выбиралось исходя из уровня значимости  $\alpha = 0,995$  для асимптотического распределения.

Параметры случайных сигналов: 1) нормальное распределение: среднее значение  $\mu = 0$ , среднеквадратичное отклонение  $\sigma = 3$ ; 2) равномерное распределение  $[-2,5; 2,5]$ ; 3) логнормальное распределение: среднее значение первоначального нормального распределения  $\mu = 0$ , среднеквадратичное отклонение  $\sigma = 0,75$ . Графики полученных зависимостей оценок мощностей критериев для разных случайных составляющих выборочно приведены на рис. 2 с количеством точек  $N=60$ .

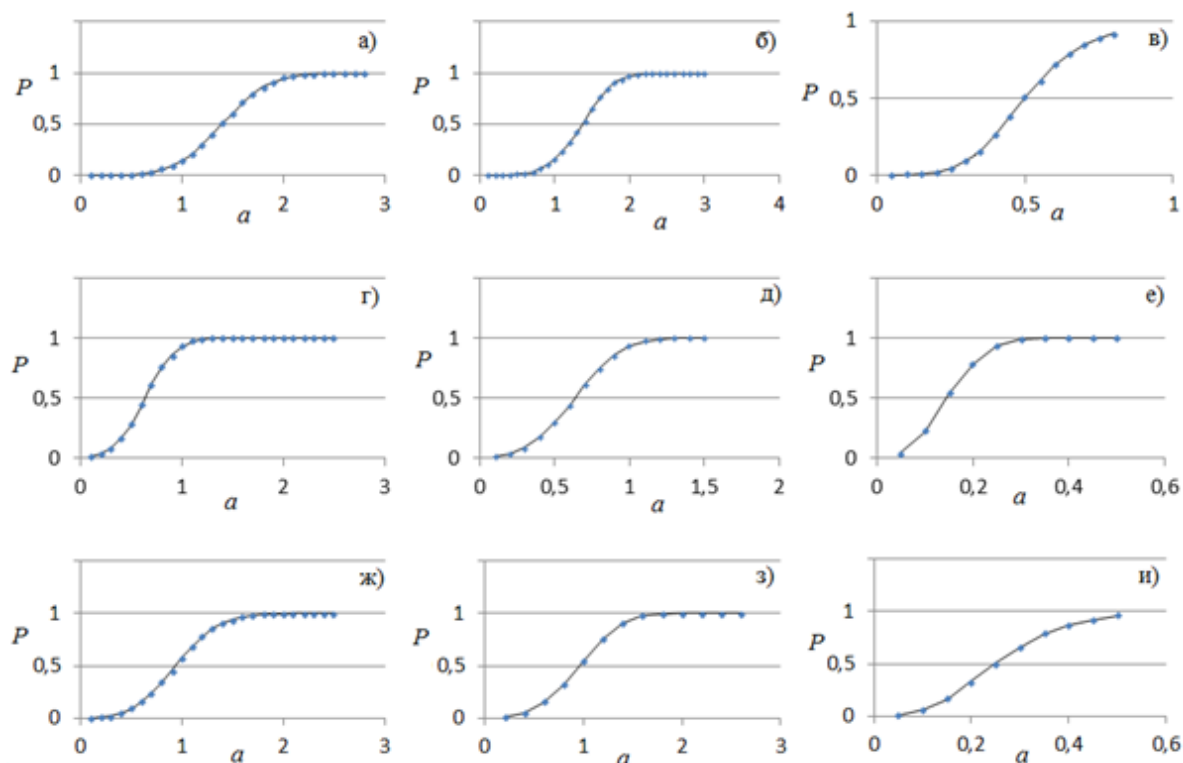


Рисунок 2 - Зависимости мощности (вероятности успешной идентификации тренда) от наклона  $a$  трендовой составляющей при  $N = 60$ : а,б,в – критерий автокорреляции; г,д,е – инверсий; ж,з,и – Кокса-Стюарта; а,г,ж – нормальное распределение случайной составляющей; б,д,з – равномерное; в,е,и – логнормальное

Из полученных результатов следует, что критерий инверсий является наиболее мощным относительно гипотезы о наличии линейного тренда при случайных составляющих сигнала с различными распределениями и различным числе точек. Критерий Кокса-Стюарта показал более высокую мощность при малых коэффициентах наклона трендовой составляющей при  $N=10$ , однако фактический уровень значимости при этом значительно снизился, что объясняется высокой степенью дискретности статистики данного критерия при малом числе точек. Таким образом, критерий инверсий представляется наиболее предпочтительным для применения в экстремальных регуляторах.

### Список литературы

1. Сравнительный анализ систем экстремального регулирования, основанных на статистических критериях наличия тренда, на примере управления электрическими параметрами ДСП / Е.С. Рябчикова, М.Ю. Рябчиков, А.И. Сунаргулова, Р.В. Танков, В.Ю. Перевалов // Автоматизированные технологии и производства. 2015. № 4 (10). С. 4-8.
2. Применение прогнозной модели для оптимизации управления энергетическим режимом ДСП / Е.С. Рябчикова, М.Ю. Рябчиков, Б.Н. Парсункин // Автоматизация технологических и производственных процессов в металлургии. 2012. № 4. С. 179-189.

3. Усачев, М.В. Система автоматического управления энергетическим режимом электродуговых печей переменного тока: автореферат дис. на соискание степени канд. техн. наук: 05.13.06. М., 2009.
4. Кобзарь, А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.
5. Лемешко, Б.Ю. Критерии проверки гипотез о случайности и отсутствии тренда. Руководство по применению. Новосибирск, 2015.

#### References

1. Comparative analysis of optimum control systems based on trend statistical criteria: the case study of EAF electrical parameters control / E.S. Ryabchikova, M.Yu. Ryabchikov, A.I. Sunargulova, R.V. Tankov, V. Yu Perevalov // Automation of technologies and production. 2015. № 4 (10). Pp. 4-8.
  2. The use of a predictive model for optimizing the control of the energy regime of EAF / E.S. Ryabchikova, M.Yu. Ryabchikov, B.N. Parsunkin // Automation of technologies and production in metallurgy. 2012. № 4. Pp. 179-189.
  3. Usachev, M.V. System of automatic control of the energy regime of electric arc furnaces of alternating current: the thesis abstract for the degree of candidate of technical sciences: 05.13.06. М., 2009.
  4. Kobzar, A.I. Applied mathematical statistics. For engineers and scientists. - Moscow: FIZMATLIT, 2006.
  5. Lemeshko, B.Yu. Criteria for testing hypotheses about randomness and absence of a trend. Application guide. Novosibirsk, 2015.
-