Международный журнал информационных технологий и энергоэффективности

Сайт журнала:
http://www.openaccessscience.ru/index.php/ijcse/

УДК 536.2

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ МЕЖДУ УРАВНЕНИЯМИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ДИФФУЗИИ

Канарейкин А.И.
ФГБОУ ВО «РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГЕОЛОГОРАЗВЕДОЧНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ СЕРГО ОРДЖОНИКИДЗЕ (МГРИ)», Москва, Россия, (МГРИ), г. Москва, Российская Федерация, (117485, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 23), e-mail: kanareykins@mail.ru

Работа посвящена явлениям переноса за счёт теплопроводности и диффузии. В ней раскрывается сущность математической аналогии между уравнениями теплопроводности и диффузии. Под математической аналогией в приведённой работе понимается эквивалентность математических формулировок разных физических задач с точностью до постоянных. Привлекательность математических аналогий заключается как раз в том, что при известном решении одной задачи легко записать соответствующее решение математически идентичных задач другой физической сущности. Эти решения можно использовать при описании диффузионных процессов, а также других явлений при одинаковой математической постановке.

Ключевые слова: Теплопроводность, диффузия, математическая аналогия, оператор Лапласа, параболическое уравнение, гиперболическое уравнение.

MATHEMATICAL ANALOGY BETWEEN THE EQUATIONS OF THERMAL CONDUCTIVITY AND DIFFUSION

Kanareykin A.I.
SERGO ORDZHONIKIDZE RUSSIAN STATE UNIVERSITY FOR GEOLOGICAL PROSPECTING, Moscow, Russia, (117485, Moscow, st. Miklukho-Maklaya 23), e-mail: kanareykins@mail.ru

The work is devoted to the phenomena of transfer due to thermal conductivity and diffusion. It reveals the essence of the mathematical analogy between the equations of thermal conductivity and diffusion. The mathematical analogy in this paper refers to the equivalence of mathematical formulations of various physical problems up to constants. The attractiveness of mathematical analogies lies precisely in the fact that, with a known solution to one problem, it is easy to write down the corresponding solution to mathematically identical problems of another physical entity. These solutions can be used to describe diffusion processes, as well as other phenomena with the same mathematical formulation.

Keywords: Thermal conductivity, diffusion, mathematical analogy, Laplace operator, parabolic equation, hyperbolic equation.

Сущность математической аналогии между уравнениями теплопроводности и диффузии считается наиболее наглядной [1]. Нестационарные процессы перераспределения температуры и вещества описываются уравнениями параболического типа при соответствующих начальном и граничных условиях [2]. Эти уравнения отличаются друг от друга физическим смыслом постоянных. После перенормировки последних из решения задачи теплопроводности легко записывается решение соответствующей задачи диффузии. Если в системе отсутствуют источники (стоки) тепла, то нестационарное уравнение теплопроводности для трехмерного случая имеет вид (декартовы координаты) [3-9]:

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \tag{1}$$

где $a^2 = \frac{\lambda}{c\rho}$ – коэффициент температуропроводности,

λ – коэффициент теплопроводности,

С – теплоемкость твердого тела при постоянном объеме,

ρ – плотность материала.

Уравнение можно записать в компактной форме использую символическое обозначение оператора Лапласа в декартовой системе координат:

$$\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{2}$$

С учетом (2) получим:

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T \tag{3}$$

Легко убедиться, что правая и левая части уравнения (3) имеют одинаковые размерности. Так, например, в системе СИ имеем:

$$[a^2] = \frac{m^2}{c}, \left[\frac{1}{a^2}\frac{\partial T}{\partial t}\right] = \frac{K}{m^2}; [\Delta T] = \frac{K}{m^2}$$

При этом используется абсолютная шкала температуры Правильность тех или иных соотношений очень часто проверяется с привлечением размерностей соответствующих величин. Если в системе имеются источники(стоки) тепла, то уравнение теплопроводности изменяется

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T \pm \frac{f(x,y,z,t)}{\lambda} \tag{4}$$

где f(x,y,z,t) –объемная плотность внутренних источников (стоков) тепла размерностью $\frac{Вт}{м^3}$. В качестве источников тепла рассматривают объемное тепловыделение за счёт ядерных реакций. Поглощение тепла может быть обусловлено химическими реакциями в твердом теле. В уравнении (4) знак плюс соответствует выделению тепла, а знак минус его поглощению. Остальные обозначения соответствуют принятым ранее.

Физическая интерпретация уравнения теплопроводности заключается в следующем. Для ясности понимания рассмотрим одномерный случай при отсутствии объемных источников тепла:

$$\frac{1}{\omega_2}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{5}$$

Это уравнение связывает между собой скорость изменения температуры во времени $\frac{\partial T}{\partial t}$ и вогнутость (выпуклость) температурного профиля (вторая производная температуры по координате $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$). Если $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} > 0$ (вогнутый профиль), то $\frac{\partial T}{\partial t} > 0$. Физически это означает повышение температуры. Для $\frac{\partial T}{\partial t} < 0$, что соответствует понижению температуры. В точке перегиба ($\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$) температура остаётся постоянной.

Уравнение теплопроводности принадлежит к параболическому (нестационарное уравнение) или эллиптическому (стационарное уравнение) типам [10]. Решение нестационарного уравнения теплопроводности дает бесконечную скорость распространения теплового возмущения. Физически это означает, что температура во всех точках тела меняется одновременно.

Между тем любые возмущения распространяются в твердых телах с конечными скоростями, не превышающими скорости звука. Тепловое возмущение также должно иметь конечную скорость распространения. Такую скорость называют скоростью тепловых волн или вторым звуком. Свое название «второй звук» получил по аналогии между фононами в твёрдом теле и молекулами газа. Волновое колебательное возмущение плотности молекул раздаёт звук в газе, колебание локальной плотности фононов вызывает второй звук (тепловую волну) в твердом теле. Для определения температуры в этом случае используют гиперболическое уравнение теплопроводности:

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T \tag{6}$$

где ω_2 – скорость распространения теплового возмущения(тепловых волн). При $\omega_2 \to \infty$ уравнение (1) становится параболическим, то есть его решение даёт одновременное изменение температуры во всех точках твёрдого тела. Гиперболическое уравнение теплопроводности применяют, как правило, при тепловых импульсах малой длительности, когда путь теплового возмущения соизмерим с длиной диффузии тепла.

Далее рассмотрим некоторые конкретные примеры использования уравнений параболического типа. Эти примеры подтверждают сущность математических аналогий в механике сплошной среды. В первую очередь остановимся на математическом описании диффузионных процессов [11-19]. Под этим названием понимают перераспределение легирующих элементов сплава под действием градиентов концентрации, температуры и напряжений. Процессы диффузии в континуальном приближении, то есть распределение концентрации атомов примеси является непрерывной функцией. С позиции математического формализма уравнение диффузии идентично уравнению теплопроводности (1) (трехмерный случай):

$$\frac{1}{D}\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} = \Delta C \tag{7}$$

где D - коэффициент диффузии атомов примеси, C - количество атомов примеси в единице объема (размерное значение) или отношение числа атомов примеси к числу мест для их размещения (безразмерная концентрация). Континуальное описание процесса диффузии предполагает, что в единице объема находится большое число атомов примеси Расстояние между соседними примесными атомами сопоставимо с параметром кристаллической решетки твердого тела. Интересно отметить, что коэффициенты температуропроводности a^2 и диффузии D имеют одинаковую размерность $\left[\frac{м^2}{с}\right]$. Это свидетельствует о математической аналогии двух уравнений с разным физическим смыслом. Поэтому решение одной из задач может использоваться для описания другого физического процесса. Если в системе имеются источники или стоки доя атомов примеси, то соответствующее уравнение диффузии аналогично уравнению (4) теплопроводности:

$$\frac{1}{D}\frac{\partial C}{\partial t} = \Delta C \pm f_1(x, y, z, t) \qquad (8)$$

где функция $f_1(x,y,z,t)$ в зависимости от знака определяет источники или стоки примесных атомов. При этом размерность этой функции должна соответствовать размерности соответствующих членов уравнения (8), то есть:

$$\left[\frac{1}{D}\frac{\partial C}{\partial t}\right] = \left[\Delta C\right] = \left[f_1(x, y, z, t)\right] \qquad (9)$$

Источники и стоки атомов примеси возникают не только при химических реакциях, но и при облучении материала. Так, например, при нейтронном облучении возникают радиационные точечные дефекты, вакансии и межузельные атомы. Координатная зависимость появления последних описывается функцией $f_1(x,y,z,t)$ правой части уравнений (8). И в данном случае прослеживается математическая аналгия с задачей теплопроводности с источниками или стоками тепла.

Уравнение параболического типа используют при описании движения жидкости через пористую среду [20-27]. В континуальном приближении распределение давления жидкости в пористой среде подчиняется уравнению (трехмерный случай):

$$\frac{1}{D}\frac{\partial C}{\partial t} = \Delta C \pm f_1(x, y, z, t) \qquad (10)$$

где α_p - коэффициент пропорциональности между градиентом давления жидкости и ее потоком, p - давление жидкости. Соотношения (3), (7) и (10) с точностью до постоянных математически эквивалентны, хотя и описывают различные физические явления: температура, концентрация примесей, давление жидкости.

Таким образом, математическая аналогия между уравнениями теплопроводности и диффузии позволяет охватить достаточно широкий спектр подобных задач. Привлекательность математических аналогий заключается как раз в том, что при известном решении одной задачи легко записать соответствующее решение математически идентичных задач другой физической сущности. Известно, что наиболее тщательно и подробно проанализированы задачи теплопроводности. Эти решения можно использовать при описании диффузионных процессов, а также других явлений при одинаковой математической постановке. При этом начальное и граничные условия рассматриваемых задач с точностью до постоянных также математически идентичны. Это обеспечивает единственность решения математической задачи и гарантирует достоверность полученных результатов.

Список литературы

1. Канарейкин, А. И. Математическая аналогия между температурными и концентрационными напряжениями//Международный журнал информационных технологий и энергоэффективности, 2024. - Т. 9. - № 3 (41). - С. 109-114.
2. Канарейкин, А. И. Уравнения параболического типа: учебное пособие. - Саратов: Издательство «Саратовский источник», 2024. - 31 с.
3. Канарейкин, А.И. Применение уравнения Пуассона в теплофизике//Научные труды Калужского государственного университета имени К.Э. Циолковского. - Калужский государственный университет им. К.Э. Циолковского, 2016. - С. 199-200.
4. Канарейкин, А. И. Основы термодинамики: учебное пособие. - Саратов: Издательство «Саратовский источник», 2023. - 63 с.
5. Канарейкин, А. И. Уравнения математической физики: учебное пособие. - Саратов: Издательство «Саратовский источник», 2024. - 35 с.
6. Канарейкин, А.И. О частном решении дифференциального уравнения в частных производных без перехода к эллиптической системе координат//Научные труды Калужского государственного университета имени К.Э. Циолковского. Региональная университетская научно-практическая конференция. Сер. "Естественные науки" Калужский государственный университет имени К.Э. Циолковского, 2015. - С. 140-141.
7. Канарейкин, А. Уравнения математической физики: учебное пособие. – Саратов: Издательство «Саратовский источник», 2024. — 35 с.
8. Петухов, Б.С., Генин, А.Г., Ковалев, С.А. Теплообмен в ядерных энергетических установках. - М.: Атомиздат, 1974. - 408 с.
9. Власов, Н.М. Тепловыделяющие элементы ядерных ракетных двигателей/Н.М.Власов, И.И. Федик. - М.: ЦНИИ атоминформ, 2001. - 208с.
10. Канарейкин, А. И. Уравнения эллиптического типа: учебное посо-бие. - Саратов: Издательство «Саратовский источник», 2024. - 31 с.
11. Ганюков А.А., Кадырова И.А., Кадыров А.С., Маратов Д.Д. Математическое моделирование процесса диффузии и кинетики массопереноса веществ в различных средах//Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2021. – № 4. – С. 86-91
12. Кафаров В.В., Глебов М.Б. Математическое моделирование основных процессов химических производств: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 1991. – 400 с.
13. Рапопорт Э.Я. Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами. – М.: Высш. шк., 2003. – 299 с.
14. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 576 с.
15. Воробьев А.Х. Диффузионные задачи в химической кинетике. Учебное пособие − М.: Изд-во Моск. ун-та, 2003. − 98с.
16. Губарев С.В., Берг Д.Б., Добряк П.В. Математическая модель и численный метод для решения задач диффузии и теплопроводности // Современные проблемы науки и образования, 2013. – № 6.
17. Мартинсон, Л.К., Малов, Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002 – 368 с.

18. Труфанова, Т.В., Масловская, А.Г., Веселова, Е.М. Методы решения уравнений математической физики. Учебное пособие – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2015. – 196 с.
19. Peacman, D.W. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations / D.W. Peacman, H.H.Jr. Rachford//J.Soc. Indust. Appl. Math, 1995. – V. 3. – p. 28-41.
20. Douglas, Jr.J. Alternating direction iteration for mildly nonlinear elliptic difference equations//II. Num. Math., 1962. – V. 4. – p. 301-302.
21. Вабищевич, П.Н. Разностные схемы для нестационарных задач конвекции-диффузии /П.Н.Вабищевич, А.А.Самарский//Журнал вычислительной математики и математической физики, 1998. – Т. 38, № 2. – С. 207-219.
22. Rosenberg, D.U. An explicit finite difference solution to the convection-dispersion equations // Num. Meth. Partial. Diff. Eqn., 1986. –V. 2. – p. 229-237.
23. Krukier, L.A. Numerical Solution of the Steady Convection-Diffusion Equation with Dominant Convection//International Conference on Computational Science, ICCS. – 2013. – V.18. – p. 2095-2100.
24. Buckova, Z. Alternating direction explicit methods for convection diffusion equations/Z. Buckova, M. Ehrhardt, M. Gunther//Bergische Universitat Wuppertal Fachbereich Mathematik und Naturwissenschaften, IMACM, 2015. – p. 309-325.
25. Maslovskaya, A.G., Sivunov, A.V. Simulation of electron injection and charging processes in ferroelectrics modified with the SEM-techniques // Solid State Phenomena, 2014. – V. 213. – p. 119-124.
26. Pavelchuk, A.V., Maslovskaya, A.G. Numerical simulation of electron beam-induced dielectric charging using advanced computational scheme for solving semilinear reaction-diffusion equation // World Journal of Modelling and Simulation, 2018. – V. 14, № 2. – p. 83-89.
27. Leonard, B.P. A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, 1979. – V. 19. – p. 59-98.

References

1. Kanarekin A. I. Mathematical analogy between temperature and concentration stresses // International Journal of Information Technology and Energy Efficiency, 2024. - Vol. 9. - № 3 (41). - pp. 109-114.
2. Kanarekin A. I. Equations of the parabolic type: a textbook. - Saratov: Publishing house "Saratov source", 2024. - p.31
3. Kanarekin A.I. Application of the Poisson equation in thermophysics // Scientific works of Kaluga State University named after K.E. Tsiolkovsky. - Kaluga State University named after K.E. Tsiolkovsky, 2016. - pp. 199-200.
4. Kanarekin A. I. Fundamentals of thermodynamics: a textbook. - Saratov: Publishing house "Saratov source", 2023. - p.63
5. Kanarekin A. I. Equations of mathematical physics: a textbook. - Saratov: Publishing house "Saratov source", 2024. - p.35
6. Kanarekin A.I. On the partial solution of a partial differential equation without transition to an elliptic coordinate system // Scientific works of Kaluga State University named after K.E. Tsiolkovsky. Regional University Scientific and Practical Conference. Ser. "Natural Sciences" Kaluga State University named after K.E. Tsiolkovsky, 2015. - pp. 140-141.

7. Kanarekin A. Equations of mathematical physics: a textbook. – Saratov: Publishing house "Saratov source", 2024. - p.35
8. Petukhov B.S., Genin, A.G., Kovalev, S.A. Heat transfer in nuclear power plants. - M.: Atomizdat, 1974. - p.408
9. Vlasov N.M. Fuel elements of nuclear rocket engines / N.M. Vlasov, I.I. Fedik. - - M.: Tsniiatominform, 2001. - p 208
10. Kanarekin A. I. Elliptic type equations: a textbook. - Saratov: Publishing house "Saratov source", 2024. – p. 31
11. Konyukov A.A., Kadyrova I.A., Kadyrov A.S., Muratov D.D. Mathematical modeling of the diffusion process and kinetics of mass transfer of substances in various media // International Journal of Applied and Fundamental Research. – 2021. – No. 4. – pp. 86-91
12. Kafarov V.V., Glebov M.B. Mathematical modeling of the main processes of chemical production: Textbook for universities. – M.: Higher School, 1991. – p.400
13. Rapoport E.Ya. Structural modeling of objects and control systems with distributed parameters. – M.: Higher School, 2003. – p.299
14. Polyanin A.D. Handbook of linear equations of mathematical physics. – M.: FIZMATLIT, 2001. – p.576
15. Vorobyov A.H. Diffusion problems in chemical kinetics. Textbook − Moscow: Publishing House of Moscow. Unita, 2003. − p.98
16. Gubarev S.V., Berg D.B., Dobryak P.V. Mathematical model and numerical method for solving problems of diffusion and thermal conductivity // Modern problems of science and education, 2013. – No. 6.
17. Martinson L.K., Malov Yu.I. Differential equations of mathematical physics. – M.: Publishing House of Bauman Moscow State Technical University, 2002 - p.368
18. Trufanova T.V., Maslovskaya A.G., Veselova E.M. Methods for solving equations of mathematical physics. Textbook – Blagoveshchensk: Amur State University, 2015. – p.196
19. Peacman D.W. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations / D.W. Peacman, H.H.Jr. Rachford//J. Soc. Indust. Appl. Math, 1995. – V. 3. – pp. 28-41.
20. Douglas Jr.J. Alternating direction iteration for mildly nonlinear elliptic difference equations //II. Num. Math., 1962. – V. 4. – . pp. 301-302.
21. Vabishevich P.N. Difference schemes for nonstationary convection-diffusion problems/P.N. Vabishevich, A.A. Samarsky//Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics, 1998. – Vol. 38, No. 2. – pp. 207-219.
22. Rosenberg D.U. An explicit finite difference solution to the convection-dispersion equations//Num. Meth. Partial. Diff. Eqn., 1986. –V. 2. – pp. 229-237.
23. Krukier L.A. Numerical Solution of the Steady Convection-Diffusion Equation with Dominant Convection//International Conference on Computational Science, ICCS. – 2013. – V.18. – pp. 2095-2100.
24. Buckova Z. Alternating direction explicit methods for convection diffusion equations/Z. Buckova, M. Ehrhardt, M. Gunther//Bergische Universitat Wuppertal Fachbereich Mathematik und Naturwissenschaften, IMACM, 2015. – pp. 309-325.
25. Maslovskaya A.G., Sivunov A.V. Simulation of electron injection and charging processes in ferroelectrics modified with the SEM-techniques//Solid State Phenomena, 2014. – V. 213. – pp. 119-124.

26. Pavelchuk A.V., Maslovskaya A.G. Numerical simulation of electron beam-induced dielectric charging using advanced computational scheme for solving semilinear reaction-diffusion equation//World Journal of Modelling and Simulation, 2018. – V. 14, № 2. – pp. 83-89.
27. Leonard, B.P. A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation//Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, 1979. – V. 19. – pp. 59-98.