Лозница С.Ю., Гундобин Г.В., Саляхетдинов А.М. Применение дифференциальных уравнений для моделирования и решения практических задач// Международный журнал информационных технологий и энергоэффективности.– 2024. – Т. 9 № 6(44) ч.2 с. 5–10

Международный журнал информационных технологий и энергоэффективности

Сайт журнала:
http://www.openaccessscience.ru/index.php/ijcse/

УДК 004.942

# ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ И РЕШЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

**Лозница С.Ю., [1]Гундобин Г.В., Саляхетдинов А.М.**
*ФГБОУ ВО САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ ИМЕНИ ГЛАВНОГО МАРШАЛА АВИАЦИИ А.А. НОВИКОВА", Санкт-Петербург, Россия (196210, город Санкт-Петербург, ул. Пилотов, д.38)*, e-mail: *[1]grishagundobin@gmail.com*

**В статье рассмотрена тематика применения дифференциальных уравнений для моделирования и решения практических задач. Изучены аспекты применения дифференциальных уравнений для моделирования и решения конкретных практических задач в сфере медицины, физики, биологии. Показано, что использование дифференциальных уравнений в практических аспектах позволяет найти оптимальное решение многих проблем.**

Ключевые слова: Дифференциальные уравнения, применение, моделирование, практические задачи.

# APPLICATION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR MODELING AND SOLVING PRACTICAL PROBLEMS

**Loznitsa S.Yu.**, [1]**Gundobin G.V.**, **Salakhetdinov A.M.**
*ST. PETERSBURG STATE UNIVERSITY OF CIVIL AVIATION NAMED AFTER AIR CHIEF MARSHAL A.A. NOVIKOV", St. Petersburg, Russia (196210, St. Petersburg, Pilotov st., 38), e-mail: [1]grishagundobin@gmail.com*

**The article discusses the topic of using differential equations for modeling and solving practical problems. Aspects of the application of differential equations for modeling and solving specific practical problems in the field of medicine, physics, and biology have been studied. It is shown that the use of differential equations in practical aspects allows one to find the optimal solution to many problems.**

Keywords: Differential equations, application, modeling, practical problems.

## Введение.

Современная математика применяется при изучении экономических, гуманитарных, биологических, физических, технических и других явлений. Это происходит посредством построения математической модели, учитывающей все существенные связи внутри явления. Под математическим моделированием будем понимать метод исследования процессов или явлений путем построения их математических моделей и исследования этих процессов [1]. Математические модели реального процесса или объекта могут иметь вид формулы, уравнений, системы уравнений, графиков и т.п. Изучая разные задачи экономики, физики, техники, часто можно установить связь между величинами, описывающими тот или иной процесс, и скоростями их изменения относительно других независимых переменных величин.

При этом применяются уравнения, в которых неизвестные функции находятся под знаком производной, называемой дифференциальной. Характерным свойством дифференциальных уравнений является множество решений. Поэтому, решив дифференциальные уравнения, описывающие течение определенного процесса, невозможно однозначно найти зависимость между величинами, характеризующими этот процесс. Чтобы найти конкретное решение уравнения, которое соответствует конкретной задаче, нужно иметь дополнительную информацию, характеризующую исходные условия, то есть решить задачу Коши. Известнейшие практические примеры использования дифференциальных уравнений связаны с моделированием движения океанских течений, воздушных масс, турбулентных потоков в атмосфере, изучение поведения цен на фондовом рынке, анализ распространение эпидемий или динамики численности популяций.

Цель статьи – исследование применения дифференциальных уравнений для моделирования и решения практических задач.

**Основная часть.**

Упомянем, что дифференциальным уравнением называется нетождественное соотношение между независимой переменной, искомой функцией и ее производными по независимой переменной к определенному порядку включительно.

В общем виде дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид $F(x, y, y') = 0$, а дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид:

$$F(x, y, y' \dots y^{(n)}) = 0$$

Решением дифференциального уравнения $F(x, y, y') = 0$ на некотором интервале $I = (a, b)$ называется непрерывно дифференцированная функция $y = \varphi(x)$, таковая, что $F(x, \varphi(x), \varphi'(x) = 0$.

Дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений, необходимо указать начальное условие $y(x_0) = y_0$, чтобы решить задачу Коши.

Рассмотрим применение дифференциальных уравнений для моделирования и решения конкретных практических задач.

Первым из прикладных направленй использования дифференциальных уравнений для моделирования практических задач будет решение проблем распространения эпидемий на примере Covid-19. Мы живем в динамической среде, в которой протекают разные процессы, и факторы, влияющие на них, также часто изменяются. Атака коронавируса SARS-CoV-2 2019 сильно изменила весь мир и сделала стремительные изменения условий проживания людей в нем. Модификации этого вируса до сих пор атакуют все страны мира.

Смоделируем модель SIR, описывающая распространение инфекционной болезни среди населения и предусматривающая три ее состояния: инфицированное (S – от англ. susceptible), инфекционное (I – от англ. infected) и выздоровившее (R – от англ. recovered) [1 , с. 110–113]. При определенных условиях эти состояния могут превращаться одно в другое по схеме (Рисунок 1) [2].

Рисунок 1 – Модель SIR


Рисунок 2 – Модель SEIR

Описывается системой SIR дифференциальных уравнений:

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta \cdot S \cdot I}{N}, \frac{dI}{dt} = \frac{\beta \cdot S \cdot I}{N} - \gamma \cdot I, \frac{dR}{dt} = \gamma \cdot I$$

где S – количество здоровых людей;

I – количество инфицированных людей;

R – количество выздоровевших или умерших людей;

N=S+I+R – общее количество лиц в системе;

β – коэффициент переноса инфекции;

γ – коэффициент излечения.

Модель позволяет оценивать количество инфицированных и определять эффективность стратегий борьбы с болезнью. Существует много модификаций этой модели, которые учитывают разные факторы, влияющие на распространение инфекционной болезни среди избранного населения. Наиболее важные факторы: иммунитет населения, вакцинация и карантинные ограничения и самоизоляция.

У Оксфордской SIR модели для Covid-19 коэффициент переноса инфекции и коэффициент излечения выражаются через новые два параметра:

$$\beta = \frac{R_0}{T_{inf}}, \gamma = \frac{1}{T_{inf}}$$

где $R_0$ – коэффициент репродукции или среднее количество заражений, вызванных одним больным человеком (зависит от поведения людей и карантинных ограничений);

$T_{inf}$ – активный период или время, которое больной является заразным (характеризует реакцию организма человека на вирус и не зависит от карантинных ограничений) [2].

Известный ученый и профессор прикладной математики Корнеллского университета Стивен Строгац для исследования динамики распространения болезней решает эти модели численно с помощью метода Эйлера или метода Рунге-Кутты [3].

Представим разработку модели класса SEIR, отличающиеся от SIR дополнительным компартментом E – это больные в инкубационном периоде, когда они еще не заразны. Эти модели оказались наиболее успешными в прогнозировании распространения COVID-19 в Китае 2019 [3, с. 13]. Состояния компартментов могут превращаться один в другой по схеме (рис. 2) [2]. Описуется SEIR системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{R_0}{T_{inf}} \cdot \frac{1}{N} \cdot S \cdot I, \frac{dE}{dt} = \frac{R_0}{T_{inf}} \cdot \frac{1}{N} \cdot S \cdot I - \frac{E}{T_{inc}},$$

$$\frac{dI}{dt}=\frac{E}{T_{inc}}-\frac{I}{T_{inf}},\frac{dR}{dt}=\frac{I}{T_{inf}},$$

где дополнительный параметр $T_{inc}$ – инкубационный период (E – от англ. exposed).

Достаточно гибкая к наполнению калиброванными для выбранного региона параметрами и факторами, актуальными в определенное время именно для него.

Была разработана модель SEIR_U, адаптированную к ситуации в РФ по состоянию на март-май 2020 года [2, с. 8-10]. Модели SEIR можно эффективно использовать для прогнозирования распространения эпидемий, вызванных новыми вирусами или модификациями старых вирусов. Могут использоваться и для количественной оценки эффективности выбранных контрмер, уменьшая с момента их внедрения коэффициенты, характеризующие снижение передаточных коэффициентов инфекции вследствие введения ограничений на контакты и выбранных контрмер.

Рассмотрим также несколько прикладных задач физики, химии, биологии и экономики, которые приводят к дифференциальным уравнениям. Исследуем первичные структуры материи и соответствующие им простейшие формы движения. Скорость охлаждения нагретого тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. За 20 минут тело остыло от 100 до 50 °С. до 20 °С?

Пусть время t – независимая переменная, а x(t) – закон изменения температуры с течением времени, взятой с противоположным знаком, т.е. $-\frac{dx}{dt}$. По условию задачи $-\frac{dx}{dt}=k(x(t)-15)$, где k – коэффициент пропорциональности.

Кроме того, из условия следует, что x(0) = 100, x(20) = 50.

Решая дифференциальное уравнение, получим:

$$\frac{dx}{x-15}=-kdt, \ln|x-15|=-kt+\ln(C), \text{откуда } x(t)=15+Ce^{-kt}$$

Из начальных условий x(0) = 100, x(20) = 50, найдем C и k.

$100 = 15+Ce^0$ , C = 85.

$50=15+85e^{-20k}$, $e^{-20k}=\frac{35}{85}=\frac{7}{17}, -20k=\ln\frac{7}{17}$

Откуда $x(t)=15+85e^{\frac{t}{20}\ln\frac{17}{7}}=15+85\left(\frac{17}{7}\right)^{-\frac{t}{20}}$

Вычислим теперь значение времени t охлаждения тела до 20 °С:

$$x(t)=15+85\left(\frac{17}{7}\right)^{-\frac{t}{20}}=20.$$

$$85\cdot(2{,}4)^{\frac{t}{20}}=5. (2{,}4)^{\frac{t}{20}}=0.059. t=65 \text{ минут}$$

Таким образом, будет определено, что тело остынет до 20°С за 65 минут.

Целый ряд задач в природе, медицине, химии, биологии, экологии по своему прикладному содержанию, математической моделью имеют уравнение в виде $\acute{f}(x)=kf(x)$, где k − const, которое называют дифференциальным уравнением показательного роста.

Пусть скорость размножения микробов пропорциональна их количеству в исходный момент времени. Количество микробов утраивается в течение 4 часов. Найти зависимость количества бактерий от времени.

Пусть P(t) – количество бактерий популяции в момент времени t , скорость размножения является производной P′(t) от количества. Получим дифференциальное уравнение показательного роста. P′(t) = k · P(t), где k > 0 – математическая модель этой задачи.

$$\frac{P'(t)}{P(t)} = k \cdot \frac{P(t)}{P(t)}, \frac{P'(t)}{P(t)} = k,$$

что равносильно уравнению (ln(P(t))′ = k , откуда ln (P(t) = k t + $C_1$, C − const.

Назначим $C_1$ = InC. Имеем In(P(t)) = kt+$C_1$, откуда: ln (P(t)) = k t + lnC. P(t)=$Ce^{kt}$.

Найдем частное решение при начальных условиях: P(0) = $P_0$, P(4) = 3$P_0$. Учитывая, P(t)=$Ce^{kt}$ , имеем $P_0$= $Ce^0$=C

Из второго условия имеем 3$P_0$=$P_0(e^k)^4$, откуда $e^{4k}$ =3 в момент времени t, а $e^k$ = $3^{1/4}$. Следовательно, количество бактерий определяется законом P(t)= $P_0(3^{1/4})$= $P_0 3^{1/4}$

Решение проблем в области медицины связано с законом уменьшения массы лечебного препарата в организме человека, если через 12 часов после введения 10 мг его масса уменьшилась вдвое. Считаем, что скорость растворения прямо пропорциональна времени. Пусть m(t) – масса лечебного препарата в организме человека в момент времени t , тогда m′(t) – скорость его растворения, математической моделью задачи является уравнение [4]:

m′(t)= –kt, где k>0

Общим решением этого дифференциального уравнения является функция

$$m(t) = \int(-kt)dt = -\frac{kt^2}{2} + C$$

Используя начальные условия m (0)=10, m(12)=5, имеем:

$$10 = -\frac{k0}{2} + C, C = 10, m(12) = -\frac{k \cdot 12^2}{2} + 10 = 5$$

$$-72k + 10 = 5. -72k = -5. k = \frac{5}{72}$$

Отсюда $m(t) = -\frac{5t^2}{72 \cdot 2} + 10 = -\frac{5t^2}{144} + 10.$

Итак, уменьшение лечебного препарата в организме человека происходит по закону.

$$m(t) = -\frac{5t^2}{144} + 10$$

В этом случае математической моделью задачи является самое простое дифференциальное уравнение.

**Заключение**

Дифференциальные уравнения являются мощным инструментом для исследования различных динамических процессов в технических, экономических, социальных и природных системах. Использование математического моделирования на основе дифференциальных уравнений позволяет прогнозировать поведение системы с динамическими процессами в будущем и устанавливать оптимальные стратегии управления ими. В статье рассмотрены различные направления применения дифференциальных уравнений для моделирования и решения конкретных практических задач.

**Список литературы**

1. Keeling M., Rohani P. Modeling infectious diseases in humans and animals. – Princeton, USA : Princeton University Press, 2018. – p.464
2. Strogatz S. Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering. 2nd ed. – Boulder, USA : Westview Press, 2018. – p.528
3. Применение дифференциальных уравнений для решения прикладных задач [Электронный ресурс] : учеб. пособие / авт.-сост.: Л. И. Родина, А. В. Егорова ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2022. – 83 с.
4. Мальцев Н.М., Медведева Н.В. Применение дифференциальных уравнений для математического моделирования процессов природы//Материалы IX Международной студенческой научной конференции «Студенческий научный форум» URL: https://scienceforum.ru/2017/article/2017040262 (дата обращения: 11.04.2024 ).

**References**

1. Keeling M., Rohani P. Modeling infectious diseases in humans and animals. – Princeton, USA : Princeton University Press, 2018. – p.464
2. Strogatz S. Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering. 2nd ed. – Boulder, USA : Westview Press, 2018. – p.528
3. Application of differential equations for solving applied problems [Electronic resource] : textbook. the manual / author-comp.: L. I. Rodina, A.V. Egorova; Vladimir State University named after A. G. and N. G. Stoletov. – Vladimir : Publishing House of the All-Russian State University, 2022. – p.83
4. Maltsev N.M., Medvedeva N.V. Application of differential equations for mathematical modeling of natural processes // Proceedings of the IX International Student Scientific Conference "Student Scientific Forum" URL: https://scienceforum.ru/2017/article/2017040262 (date of application: 04/11/2024 ).