



Международный журнал информационных технологий и энергоэффективности

Сайт журнала:

<http://www.openaccessscience.ru/index.php/ijcse/>



УДК 536.2

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СТЕРЖНЕ

Канарейкин А.И.

ФГБОУ ВО «РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГЕОЛОГОРАЗВЕДОЧНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ СЕРГО ОРДЖОНИКИДЗЕ (МГРИ)», Москва, Россия, (117485, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 23), e-mail: kanareykins@mail.ru

Работа: посвящена тепловому расчёту твэлов. Для обеспечения безопасности эксплуатации реактора введены строгие ограничения по максимальной температуре ядерного топлива. При расчете температурных полей внутри активной зоны реактора необходимо решать сопряженные задачи по определению внутреннего энерговыделения в твэле. Основной целью статьи является анализ поведения температурного поля в твэлах, цилиндрического сечения с внутренним источником тепла. При этом граничные условия являются граничными условиями второго рода. Решение приведено в полярной системе координат.

Ключевые слова: Температурное поле, уравнение Пуассона, теплопроводность, граничные условия второго рода, задача Неймана.

SOLUTION OF THE NEUMANN BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE POISSON EQUATION IN A CYLINDRICAL ROD

Kanareykin A.I.

SERGO ORDZHONIKIDZE RUSSIAN STATE UNIVERSITY FOR GEOLOGICAL PROSPECTING, Moscow, Russia, (117485, Moscow, st. Miklukho-Maklaya 23), e-mail: kanareykins@mail.ru

The paper is devoted to the thermal calculation of fuel rods. Strict restrictions on the maximum temperature of nuclear fuel have been introduced to ensure the safety of reactor operation. When calculating the temperature fields inside the reactor core, it is necessary to solve the associated problems of determining the internal energy release in the fuel element. The main purpose of the article is to analyze the behavior of the temperature field in fuel rods of cylindrical cross-section with an internal heat source. In this case, the boundary conditions are boundary conditions of the second kind. The solution is given in the polar coordinate system.

Keywords: Temperature field, Poisson equation, thermal conductivity, boundary conditions of the second row, Neumann problem.

Как известно, двух- и трехмерные уравнения Пуассона описывают многие стационарные процессы при наличии источников (стоков) в различных областях механики и физики, например, в теории тепло- и массопереноса, гидро- и аэромеханике, электростатике и т.д. В связи с этим поиск решений различных краевых задач для уравнения Пуассона (и новых более простых форм решений) весьма актуален.

Сегодня изучение тепловых явлений и процессов даёт возможность эффективно использовать их при разработке практических технических решений, а также в ходе

конструирования технических установок [1-3]. Тепловые расчёты позволяют определить необходимый температурный режим как энергетических установок, так и ядерных реакторов [4]. При этом отдельно можно выделить изучение теплообмена в стержнях, которые имеют широкое применение [5-9]. Вопросам метода расчета температурных полей в твэлах посвящено множество работ [10-22].

Работа посвящена решению краевой задачи для уравнения Пуассона для цилиндрической стенки.

Распределение определяется дифференциальным уравнением теплопроводности, которое вытекает из закона сохранения и превращения энергии. Что бы найти распределение температурного поля, необходимо решить уравнение теплопроводности.

Если температура в различных точках тела неодинакова, то в нем происходит перераспределение тепла. Дифференциальное уравнение распространения тепла имеет вид:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + Q \quad (1)$$

где: Q – количество подведённого тепла,

k – коэффициент теплопроводности,

ρ - плотность среды,

c – удельная теплоёмкость среды.

В случае стационарного процесса теплообмена, т. е. когда температура в каждой точке тела не меняется со временем - уравнение теплопроводности приобретает форму так называемого уравнения Пуассона [23]:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{Q}{k} \quad (2)$$

В случае стержней цилиндрической формы уравнения Пуассона удобно рассматривать в полярной системе координат [24, 25]:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{q_v}{\lambda} \quad (3)$$

где: q_v – удельная мощность внутреннего источника. Перепишем уравнение (3) в виде:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = -\frac{q_v}{\lambda} \quad (4)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = -\frac{q_v}{\lambda} r \quad (5)$$

Проинтегрируем обе части:

$$r \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{q_v r^2}{2\lambda} + C_1 \quad (6)$$

или

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{q_v r}{2\lambda} + \frac{C_1}{r} \quad (7)$$

Опять проинтегрируем обе части:

$$T = -\frac{q_v r^2}{4\lambda} + C_1 \ln r + C_2 \quad (8)$$

В силу неразрывности температурного поля выражение (8) примет вид:

$$T = -\frac{q_v r^2}{4\lambda} + C_2 \quad (9)$$

Теперь перейдём к задаче Неймана, которая является второй краевой задачей. В курсе дифференциальных уравнениях она представляет собой задачу с заданными граничными условиями для производной искомой функции на границе области. Примером такого граничного условия служит электрообогрев тела поверхностным нагревателем. Запишем так называемые граничные условия второго рода:

$$-\lambda_c \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_0} = q_c \quad (10)$$

здесь задаётся величина плотности теплового потока для каждой точки поверхности тела в любой момент времени. Подставим уравнение (9) в (10):

$$\frac{q_c}{\lambda_c} = \frac{q_v r_0}{2\lambda} \quad (11)$$

Формула (11) связывает тепловые потоки внутри стержня и на его поверхности.

Таким образом, в статье получено аналитическое решение осесимметричной модели в двумерной постановке задачи по определению температурного поля твэла цилиндрической формы. Решение получено аналитически путём интегрирования при граничном условии второго рода.

Список литературы

1. Лыков, А.В. Теория теплопроводности. - М., 1967. - 600 с.
2. Несис, Е.И. Методы математической физики. - М.: Просвещение, 1977. - 199 с.
3. Карслоу, Г. Теплопроводность твёрдых тел. – М.: Наука, 1964. - 600 с.
4. Петухов, Б.С., Генин, А.Г., Ковалев, С.А. Теплообмен в ядерных энергетических установках. - М.: Атомиздат, 1974. - 408 с.
5. Канарейкин, А. И. Температурные поля в твэлах при различных геометрических сечениях // Инновационная наука, 2021. - № 4. - С. 41-43.
6. Канарейкин, А.И., Калманович, В.В. Особенность поведения температурных полей в твэлах разных геометрических сечений при граничных условиях первого рода // В сборнике: Научные труды Калужского государственного университета имени К.Э. Циолковского. материалы докладов. Сер. "Естественные и технические науки. 2022" Калуга, 2022. - С. 152-156.
7. Канарейкин, А.И. Сравнительный анализ поведения температурных полей в твэлах разных геометрических сечений при граничных условиях первого рода // Международный журнал информационных технологий и энергоэффективности, 2023. - Т. 8. - № 1 (27). - С. 90-96.
8. Kanareykin, A. I. Mathematical modeling of the fuel element of a nuclear reactor taking into account the temperature dependence of the thermal conductivity of the fuel element made of

-
- uranium oxide // В сб.: IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. 2022. С. 012012. DOI: 10.1088/1755-1315/990/1/012012.
9. Kanareykin, A. I. Simulation of a fuel element made of plutonium dioxide // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. 2022. 1045. 012070. DOI: 10.1088/1755-1315/1045/1/012070.
 10. Доллежалъ, Н. А. Канальный ядерный энергетический реактор / Н. А. Доллежалъ, И. Я. Емельянов. — М.: Атомиздат, 1980. — 208 с.
 11. Крамеров, А. Я. Инженерные расчеты ядерных реакторов / А. Я. Крамеров, Я. В. Шевелев. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Энергоатомиздат, 1984. — 736 с.
 12. Алтухов, Д. Е. Расчет нестационарных и переходных нейтронно-физических процессов в реакторе на тепловых нейтронах: учебное пособие / Д. Е. Алтухов, Ф. П. Кошелев, И. В. Шаманин; Томский политехнический университет. — Томск Изд-во ТПУ, 1998. — 126 с.
 13. Симонова, О.С., Логинов, В.С. Одномерная нестационарная модель тепловыделяющей системы из произвольного числа твэлов и неактивных элементов // Фундаментальные исследования, 2014. № 5–3. С. 503–506.
 14. Дунайцев, А.А., Солонин, В.И. Процессы массообмена в пучках оребренных стержней // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2016. № 1. С. 125–134.
 15. Семенович, О.В. Моделирование теплофизических процессов в тепловыделяющих сборках и активных зонах водоохлаждаемых ядерных реакторов / О.В. Семенович // Тезисы докладов и сообщений. XIV Минский международный форум по тепло и массообмену. 23–26 мая 2016 г.: в 3-х т. – Минск: ИТМО им. А.В. Лыкова НАН Беларуси, 2016. – Т. 3. – С. 410–404.
 16. Власов, Н.М. Тепловыделяющие элементы ядерных ракетных двигателей / Н.М. Власов, И.И. Федик. - М.: ЦНИИ атоминформ, 2001. - 208с.
 17. Ramirez, J. C., Stan, M., Cristea, P. Simulations of heat and oxygendiffusion in UO₂ nuclear fuel rods // Journal of nuclear materials. – 2006. – Т. 359, № 3. – С. 174-184.
 18. Mihaila, B. et al. Simulations of coupled heat transport, oxygen diffusion, and thermal expansion in UO₂ nuclear fuel elements // Journal of Nuclear Materials. – 2009. – Vol. 394, № 2. – P. 182-189.
 19. Newman, C., Hansen, G., Gaston, D. Three-dimensional coupled simulation of thermomechanics, heat, and oxygen diffusion in UO₂ nuclear fuel rods // Journal of Nuclear Materials. – 2009. – Vol. 392. – № 1. – P. 6-15.
 20. Kang, C. H. et al. 3D finite element analysis of a nuclear fuel rod with gap elements between the pellet and the cladding // Journal of Nuclear Science and Technology. – 2015. – P. 1-8.
 21. Okunev, V. S. Designing of New Generation of the Nuclear Reactors // AIP Conference Proceedings, 2195, p. 020012.
 22. Hales, J. D. et al. Asymptotic expansion homogenization for multiscale nuclear fuel analysis // Computational Materials Science. – 2015. – Vol. 99. – P. 290-297.
 23. Канарейкин, А. И. Распределение температурного поля в твэле с эллиптическим поперечным сечением // Научные труды Калужского государственного университета им. К.Э. Циолковского, серия: естественные науки. - 2016. – С. 230 – 231.

24. Канарейкин, А. И. Применение уравнения Пуассона в теплофизике // В сборнике: Научные труды Калужского государственного университета имени К.Э. Циолковского. Калужский государственный университет им. К.Э. Циолковского, 2016. - С. 199-200.
25. Канарейкин, А. И. Применение уравнения Лапласа в теплофизике // Заметки ученого, 2023. - № 8. - С. 42-45.

References

1. Lykov, A.V. Theory of thermal conductivity. - М., 1967. - p. 600.
2. Nesis, E.I. Methods of mathematical physics. - М.: Prosveshchenie, 1977. - p. 199.
3. Carslow, G. Thermal conductivity of solids. – М.: Science, 1964. - 600 p. Petukhov, B.S., Genin, A.G., Kovalev, S.A. Heat transfer in nuclear power plants. - М.: Atomizdat, 1974. - p. 408.
4. Petukhov, B.S., Genin, A.G., Kovalev, S.A. Heat transfer in nuclear power plants. - М.: Atomizdat, 1974. - p. 408
5. Kanareikin, A. I. Temperature fields in fuel rods at various geometric sections // Innovative Science, 2021. - № 4. - pp. 41-43.
6. Kanareikin, A.I., Kalmanovich, V.V. Peculiarity of the behavior of temperature fields in fuel rods of different geometric sections under boundary conditions of the first kind // In the collection: Scientific works of the Kaluga State University named after K.E. Tsiolkovsky. Materials of reports. Ser. "Natural and technical sciences. 2022" Kaluga, 2022. - pp. 152-156.
7. Kanareikin, A.I. Comparative analysis of the behavior of temperature fields in fuel rods of different geometric sections under boundary conditions of the first kind // International Journal of Information Technology and Energy Efficiency, 2023. - Т. 8. - № 1 (27). - p.p. 90-96.
8. Kanareykin, A. I. Mathematical modeling of the fuel element of a nuclear reactor taking into account the temperature dependence of the thermal conductivity of the fuel element made of uranium oxide // В сб.: IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. 2022. С. 012012. DOI: 10.1088/1755-1315/990/1/012012.
9. Kanareykin, A. I. Simulation of a fuel element made of plutonium dioxide // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. 2022. 1045. 012070. DOI: 10.1088/1755-1315/1045/1/012070.
10. Dollezhal, N. A. Channel Nuclear Power Reactor reactor / N. A. Dollezhal, I. Y. Emelyanov. Moscow: Atomizdat, 1980. — p 208.
11. Kramerov, A. Y. Engineering calculations of nuclear reactors / A. Y. Kramerov, Y. V. Shevelev. — 2nd ed., rev. and add. — М.: Energoatomizdat, 1984. — p. 736
12. Altukhov D. E., Koshelev F. P., Shamanin I. V. Calculation of nonstationary and transient neutron-physical processes in a thermal neutron reactor: a textbook; Tomsk Polytechnic University. — Tomsk: TPU Publishing House, 1998. — p.126.
13. Simonova, O.S., Loginov, V.S. One-dimensional non-stationary model of a fuel system from an arbitrary number of fuel rods and inactive elements // Fundamental Research, 2014. № 5–3. P. 503–506.
14. Dunaitsev, A.A., Solonin, V.I. Processes of mass transfer in bundles of finned rods // Problems of mechanical engineering and automation. 2016. № 1. P. 125–134.

15. Semenovich, O.V. Modeling of thermophysical processes in fuel assemblies and active zones of water-cooled nuclear reactors / O.V. Semenovich // Abstracts of reports and reports. XIV Minsk International Forum on Heat and Mass Transfer. May 23–26, 2016: in 3 volumes – Minsk: ITMO named after A.V. Lykov of the National Academy of Sciences of Belarus, 2016. – Т. 3. – С. 410–404.
 16. Vlasov, N.M. Fuel elements of nuclear rocket engines / N.M. Vlasov, I.I. Fedik. - М.: TsNII atominform, 2001. – pp.208 .
 17. Ramirez, J. C., Stan, M., Cristea, P. Simulations of heat and oxygendiffusion in UO₂ nuclear fuel rods // Journal of nuclear materials. – 2006. – Т. 359, № 3. – С. 174-184.
 18. Mihaila, B. et al. Simulations of coupled heat transport, oxygen diffusion, and thermal expansion in UO₂ nuclear fuel elements // Journal of Nuclear Materials. – 2009. – Vol. 394, № 2. – pp. 182-189.
 19. Newman, C., Hansen, G., Gaston, D. Three-dimensional coupled simulation of thermomechanics, heat, and oxygen diffusion in UO₂ nuclear fuel rods // Journal of Nuclear Materials. – 2009. – Vol. 392. – № 1. – pp. 6-15.
 20. Kang, C. H. et al. 3D finite element analysis of a nuclear fuel rod with gap elements between the pellet and the cladding // Journal of Nuclear Science and Technology. – 2015. – pp. 1-8.
 21. Okunev, V. S. Designing of New Generation of the Nuclear Reactors // AIP Conference Proceedings, 2195, p. 020012.
 22. Hales, J. D. et al. Asymptotic expansion homogenization for multiscale nuclear fuel analysis // Computational Materials Science. – 2015. – Vol. 99. – pp. 290-297.
 23. Kanareikin, A. I. Distribution of the temperature field in the fuel rod with an elliptical cross-section // Scientific works of the Kaluga State University named after K.E. Tsiolkovsky, series: natural sciences. - 2016. – pp. 230 – 231.
 24. Kanareikin, A. I. Application of the Poisson equation in thermal physics // In the collection: Scientific works of the Kaluga State University named after K.E. Tsiolkovsky. Kaluga State University named after K.E. Tsiolkovsky, 2016. - P. 199-200.
 25. Kanareikin, A. I. Application of the Laplace equation in thermal physics // Notes of a scientist, 2023. - № 8. – pp. 42-45.
-