



ОТКРЫТАЯ НАУКА  
издательство

Международный журнал информационных технологий и энергоэффективности

Сайт журнала:

<http://www.openaccessscience.ru/index.php/ijcse/>



УДК 62

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТ СТАНЦИИ

<sup>1</sup>Хамидулин Д.М., Войкин А.О., Муханова Р.Е., Григорьев Д.О.

ФГБОУ ВО Новосибирский Государственный архитектурно-строительный университет, Новосибирск, Россия (630008, г.Новосибирск, Ленинградская ул., 113), e-mail:

<sup>1</sup>d.khamidulin@sibstrin.ru

В данной статье мы рассмотрели прямую и обратную угловые засечки, где измерение были совершены Теодолитом Theo 010 и Электронным тахеометром Trimble M3 DR5. Также была произведена оценка точности измерений двух приборов для каждой из видов засечек, а также произведено сравнение результатов определения координат станции теодолитом и электронным тахеометром.

Ключевые слова: Прямая угловая засечка, обратная угловая засечка, оценка точности, теодолит Theo 010, электронный тахеометр Trimble M3 DR5.

## MATHEMATICAL MODEL FOR DETERMINING STATION COORDINATES

<sup>1</sup>Khamidulin D.M., Voikin A.O., Mukhanova R.E., Grigoriev D.O.

Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering, Novosibirsk, Russia (630008, Novosibirsk, Leningradskaya str., 113), e-mail: <sup>1</sup>d.khamidulin@sibstrin.ru

In this article, we examined the forward and reverse angular serifs, where the measurement was made by The Theo 010 Theodolite and the Trimble M3 DR5 Electronic total station. The accuracy of measurements of two devices for each of the types of serifs was also evaluated, and the results of determining the coordinates of the station with a theodolite and an electronic total station were compared.

Keywords: Forward angular serif, reverse angular serif, accuracy estimation, theodolite Theo 010, Trimble M3 DR5 electronic total station.

**Проблема:** найти наиболее оптимальный способ измерений и при этом точный для проведения геодезических работ.

**Решение проблемы:** определить каким способом точность определения координат будет наибольшей, а также способ, который по трудоемкости уступает другому из двух рассматриваемых.

**Актуальность:** при производстве геодезических работ на строительных площадках важной частью является определение координат станции.

**Цель:** сравнение способов определения координат станции прямой и обратной угловой засечкой.

**Задачи:**

1. изучить способы определения координат станции;
2. для прямой угловой засечки измерить горизонтальные углы теодолитом Theo 010 и электронным тахеометром Trimble M3 DR5;

3. построить графики изменения горизонтальных углов;
4. вычислить координаты станции по результатам измерения углов теодолитом и тахеометром;
5. для обратной угловой засечки измерить горизонтальные углы теодолитом Theo 010 и электронным тахеометром Trimble M3 DR5;
6. вычислить координаты станции по результатам измерения углов теодолитом и тахеометром;
7. выполнить оценку точности.

**Способы определения координат станции:**

- Прямая геодезическая засечка
- Обратная геодезическая засечка
- Комбинированная
- Линейная геодезическая засечка и т.д.

На начальном этапе исследования нас интересовало определить какие существуют способы определения координат станции. В конечном счете на двух интересных из них. Это непосредственно прямая и обратная геодезическая засечки, так как это популярные способы нахождения координат точек, расстояния между ними и дирекционного угла на местности. Остановимся подробнее на каждой из засечек.

**Прямая геодезическая засечка** — это способ определения координат недоступной точки (рисунок 1). Суть этого метода состоит в том, что сначала выбирают две базовые точки, у которых известны координаты, а затем измеряется угол между прямой, проходящей через эти точки, и наблюдаемой линией визирования, направленной на исследуемую точку [1].

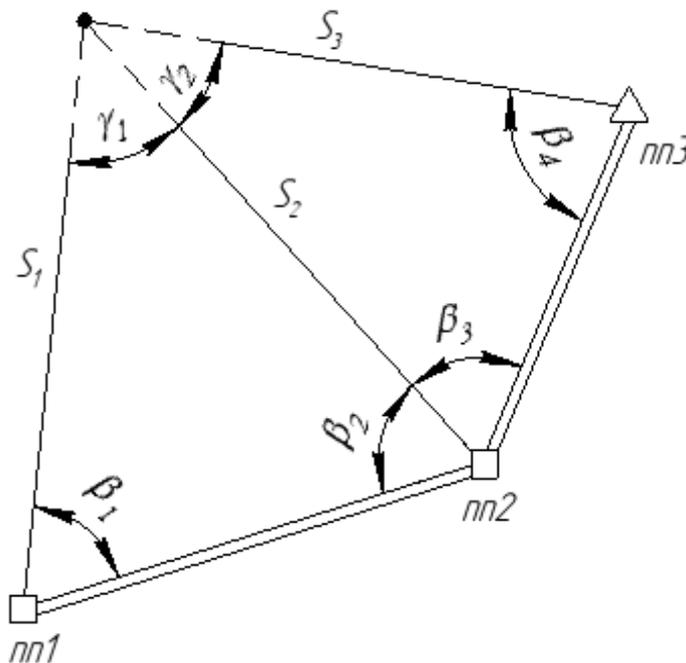


Рисунок 1 – Прямая геодезическая засечка

Для прямой геодезической засечки применяется специальный оптический инструмент – теодолит или электронный тахеометр. С его помощью измеряется угол между базовыми точками и вертикальной плоскостью, проходящей через исследуемую точку. Определение

угла позволяет определить расстояние от базовых точек до исследуемой точки. Затем, используя тригонометрические формулы, можно рассчитать географические координаты исследуемой точки.

Прямая геодезическая засечка - один из наиболее точных методов определения координат точек и используется в различных областях геодезии, например, в строительстве, картографии, геодезии и геоинформатике.

**Обратная геодезическая засечка** — это способ определения координат недоступной точки (рисунок 2) путем измерения горизонтальных углов между геодезическими пунктами [2].

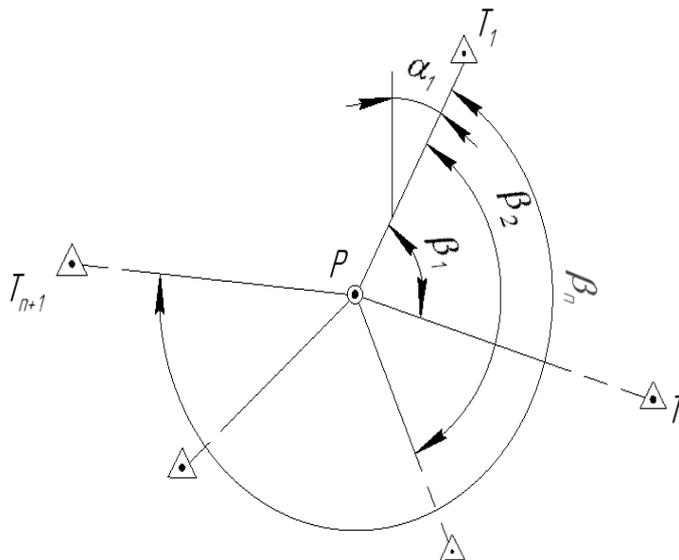


Рисунок 2 – Обратная геодезическая засечка

Суть обратной геодезической засечки заключается в том, что изначально известны координаты одной из точек, а также направления и расстояния до второй точки. Используя эти данные, можно определить координаты второй точки. Это позволяет геодезистам и строителям точно вычислять расстояния и направления для строительства дорог, мостов, зданий и других объектов на земле [3].

#### **Приборы, необходимые при решении засечек:**

Далее нас интересовало, а какими именно приборами выполнять измерения, чтобы потом не только рассмотреть способы определения координат, но и в конце определить оценку точности? В конечном итоге остановились на двух: теодолит Theo 010 (рисунок 3) и электронный тахеометр Trimble M3 DR5 (рисунок 4).



Рисунок 3 – Теодолит Theo 010  
Погрешность:  $m\beta = 10''$



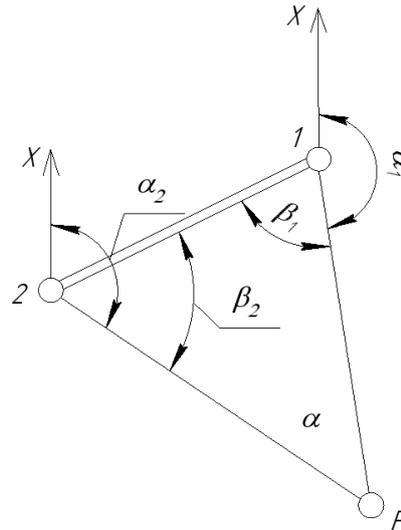
Рисунок 4 – Электронный тахеометр Trimble M3 DR5  
Погрешность:  $m\beta = 5''$

**Исходные данные для решения прямой засечки теодолитом:**

В процессе нашей работы мы выполнили по 10 измерений горизонтальных углов для решения прямой засечки теодолитом (рисунок 5). Где за точку Р мы приняли отражатель над дверью, а за точки 1 и 2 мы приняли 8 и 4 столбы в аудитории. Координаты столбов были получены заранее электронным тахеометром в условной системе координат  $X_1=115,475$  м,  $Y_1=100,000$  м,  $X_2=114,588$  м,  $Y_2=104,400$  м.

Таблица 1 – Результаты измерений горизонтальных углов теодолитом прямой геодезической засечки

№ п/п	$\beta_1$			$\beta_2$		
	°	'	''	°	'	''
1	12	56	37	153	50	2
2	12	56	35	153	50	0
3	12	56	43	153	50	21
4	12	56	42	153	50	32
5	12	56	48	153	50	3
6	12	56	42	153	50	2
7	12	56	58	153	50	5
8	12	56	31	153	50	8
9	12	56	58	153	50	9
10	12	56	50	153	50	19
Среднее значение	12	56	44	153	50	8



Риснок 5 – К решению прямой засечки

### Графики изменения горизонтальных углов

Как показано на графиках, мы видим, что они детально показывают изменение углов  $\beta_1$  (рисунок 6) и  $\beta_2$  (рисунок 7) при 10 измерений. Черная линия показывает среднее значение каждого из углов, которое подписано над графиками.

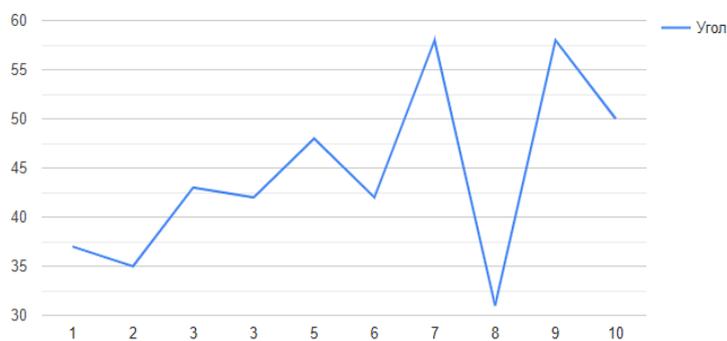


Рисунок 6 – График изменения горизонтального угла  $\beta_1$

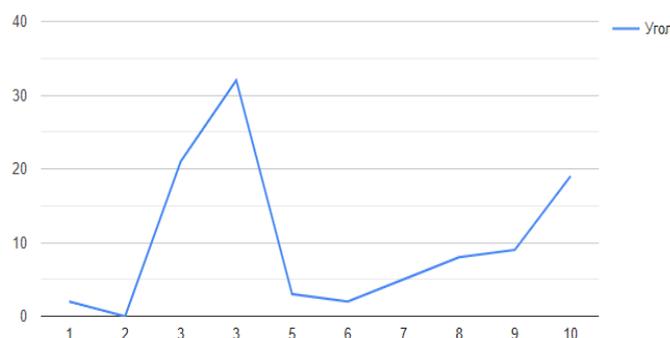


Рисунок 7 – График изменения горизонтального угла  $\beta_2$

Решение прямой геодезической засечки по формулам Юнга с применением теодолита:

$$X_p = \frac{x_1 \cdot \cot \beta_2 + x_2 \cdot \cot \beta_1 - y_1 - y_2}{\cot \beta_1 + \cot \beta_2} \quad (1)$$

$$Y_p = \frac{y_1 \cdot \cot \beta_2 + y_2 \cdot \cot \beta_1 + x_1 - x_2}{\cot \beta_1 + \cot \beta_2}$$

Таблица 2 – Результаты вычисленных координат точки Р прямой геодезической засечки

№ п/п	X <sub>p</sub>	Y <sub>p</sub>
1	73,430	103,640
2	73,431	103,641
3	73,418	103,641
4	73,415	103,645
5	73,421	103,641
6	73,422	103,640
7	73,401	103,650
8	73,431	103,641
9	73,430	103,642
10	73,420	103,642
Среднее значение	73,422	103,642

Вычисленные нами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  послужили для нахождения  $x_p$  и  $y_p$  по формуле Юнга, которая находится выше. Таким образом, мы произвели 10 вычислений координат станции Р и определили среднее значение.

#### Исходные данные для решения прямой засечки электронным тахеометром:

Такой же идеей решения мы произвели вычисления электронным тахеометром. Построили графики, на которых красной линией отмечено среднее значения углов. Далее вычислили 10 раз каждую из координат и нашли средние значения, также сделали таблицу сравнения координат  $x_p$  и  $y_p$  для двух приборов (таблица 3).

Решение прямой геодезической засечки по формулам Юнга с применением электронного тахеометра (таблица 4).

Сравнение результатов определения координат станции теодолитом и электронным тахеометром (таблица 5).

Проведя практические измерения, мы получили разницу по  $x_p = 0,013$ м и по  $y_p = 0,002$ м.

Оценка точности результатов для прямой засечки: если известна средняя квадратическая ошибка измерения горизонтальных углов  $m''_{\beta}$ , то тогда погрешность в положении определяемой точки Р вычисляется по формуле:

$$M_p = \frac{b \cdot m''_{\beta}}{p'' \cdot \sin \gamma} * \sqrt{\sin^2 \beta_1 + \sin^2 \beta_2}, \quad (2)$$

где  $b = d_{A-B}$  – базис засечки;  $p'' = 206265$  – число радиан в секундах;  $m''_{\beta}$  – средняя квадратичная погрешность измерения горизонтальных углов;  $\gamma$  – угол при вершине засечки  $180^\circ - (\beta_1 + \beta_2)$  (таблица 6).

Таблица 3 – Результаты измерений горизонтальных углов электронным тахеометром прямой геодезической засечки

№ п/п	β1			β2		
	°	'	''	°	'	''
1	12	56	44	153	50	30
2	12	56	36	153	50	35
3	12	56	42	153	50	27
4	12	56	37	153	50	41
5	12	56	40	153	50	29
6	12	56	46	153	50	33
7	12	56	52	153	50	21
8	12	56	39	153	50	28
9	12	56	42	153	50	31
10	12	56	41	153	50	34
Среднее значение	12	56	42	153	50	31

Таблица 4 – Результаты вычисленных координат точки Р прямой геодезической засечки

№ п/п	X <sub>p</sub>	Y <sub>p</sub>
1	73,408	103,642
2	73,412	103,639
3	73,411	103,641
4	73,409	103,640
5	73,412	103,640
6	73,405	103,642
7	73,405	103,643
8	73,413	103,640
9	73,409	103,631
10	73,409	103,641
Среднее значение	73,409	103,640

Таблица 5 – Разница результатов координат точки Р на двух приборах

Прибор	X <sub>p</sub> , м	Y <sub>p</sub> , м
Теодолит Theo 010	73,422	103,642
Электронный тахеометр Trimble M3	73,409	103,640
<b>Разница</b>	<b>0,013</b>	<b>0,002</b>

Таблица 6 – Результаты погрешности выдаваемый каждым прибором

Значение средней квадратичной погрешности определяемой $M_p$ , м	
Теодолит	0,03
Электронный тахеометр	0,02

Подводя итоги для прямой засечки, можно уже сказать, что средняя квадратичная погрешность по теодолиту равняется 0,03 и электронному тахеометру 0,02. Разница между приборами составляет 0,01, что является допустимым.

**Исходные данные для решения обратной угловой засечки теодолитом:**

Теперь выполняем все таким же принципом только обратной угловой засечкой. Для начала мы выполнили по 10 измерений горизонтальных углов. Измерения мы проводили в аудитории, измеряя горизонтальные углы на искомой точке Р между направлениями на три пункта.

Таблица 7 – Результаты измерений горизонтальных углов теодолитом обратной геодезической засечки

№ п/п	$\beta_1$			$\beta_2$		
	°	'	''	°	'	''
1	16	46	36	198	55	15
2	16	46	39	198	55	25
3	16	46	35	198	55	10
4	16	46	43	198	55	11
5	16	46	44	198	55	18
6	16	46	46	198	55	22
7	16	46	44	198	55	29
8	16	46	40	198	55	40
9	16	46	36	198	55	9
10	16	46	46	198	55	42
Среднее значение	16	46	42	198	55	22

**Решение обратной геодезической засечки по формулам Делабра с применением теодолита:**

Таблица 8 – Результаты вычисленных координат точки Р обратной геодезической засечки

№ п/п	X <sub>p</sub>	Y <sub>p</sub>
1	99,992	99,997
2	99,988	99,998
3	100,023	99,997
4	99,990	99,998
5	99,992	99,998
6	99,999	99,989
7	99,993	99,999
8	99,987	99,999
9	99,990	99,998
10	99,989	99,997
Среднее значение	99,994	99,997

$$\tan \alpha_{1-p} = \frac{(y_2 - y_1) \cot \beta_1 + (y_1 - y_3) \cot \beta_2 - x_2 + x_3}{(x_2 - x_1) \cot \beta_1 + (x_1 - x_3) \cot \beta_2 + y_2 - y_3} = \frac{\Delta y}{\Delta x};$$

$$\alpha_{2-p} = \alpha_{1-p} + \beta_1; \alpha_{3-p} = \alpha_{1-p} + \beta_2; \alpha_{4-p} = \alpha_{1-p} + \beta_3; \quad (3)$$

$$X_p = \frac{x_1 \tan \alpha_{1-p} - x_2 \tan \alpha_{2-p} + y_2 - y_1}{\tan \alpha_{1-p} - \tan \alpha_{2-p}};$$

$$y_p = y_1 + (x_p - x_1) \tan \alpha_{1-p} = y_2 + (x_p - x_2) \tan \alpha_{2-p}$$

Вычисленные нами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  послужили для нахождения  $x_p$  и  $y_p$  по формуле Делабра, которая находится выше. Таким образом, мы произвели 10 вычислений координат станции Р и определили среднее значение.

**Исходные данные для решения обратной угловой засечки электронным тахеометром:**

Измерения, которые были совершены в обратной угловой засечке теодолитом будут выполнены электронным тахеометром и занесены в соответствующие таблицы.

Таблица 9 – Результаты измерений горизонтальных углов электронным тахеометром обратной геодезической засечки

№ п/п	$\beta_1$			$\beta_2$		
	°	'	''	°	'	''
1	16	46	53	198	55	47
2	16	46	57	198	55	2
3	16	46	49	198	55	19
4	16	46	49	198	55	23
5	16	46	54	198	55	17
6	16	46	53	198	55	14
7	16	46	57	198	55	15
8	16	46	50	198	55	12
9	16	46	55	198	55	8
10	16	46	39	198	55	6
Среднее значение	16	46	52	198	55	16

**Решение обратной геодезической засечки по формулам Деламбра с применением электронного тахеометра:**

Таблица 10 – Результаты вычисленных координат точки Р обратной геодезической засечки

№ п/п	Xp	Yp
1	99,994	99,999
2	99,994	99,997
3	99,993	99,995
4	100,003	100,001
5	100,004	100,001
6	100,005	100,001
7	100,002	99,999
8	100,002	100,002
9	100,002	100,001
10	100,008	99,999
Среднее значение	100,001	99,999

По формуле были совершены вычисления с  $\beta_1$  и  $\beta_2$  для нахождения  $x_p$  и  $y_p$  для последующего нахождения средних значений.

**Сравнение результатов определения координат станции теодолитом и электронным тахеометром:**

Теперь мы сравнили результаты определения координат станции теодолитом и электронным тахеометром для обратной засечки и в результате получили разницу координат станции Р измеренных двумя приборами. Разница составила 7 мм и 2 мм соответственно.

Таблица 11 – Разница результатов координат точки Р на двух приборах

Прибор	Xp, м	Yp, м
Теодолит Theo 010	99,994	99,997
Электронный тахеометр Trimble M3	100,001	99,999
Разница	0,007	0,002

**Оценка точности результатов для обратной засечки:**

Расчет средней квадратической погрешности определяемой точки Р в обратной угловой засечке осуществляется по указанной формуле, с обозначением всех параметров, входящих в нее на рисунке 8.

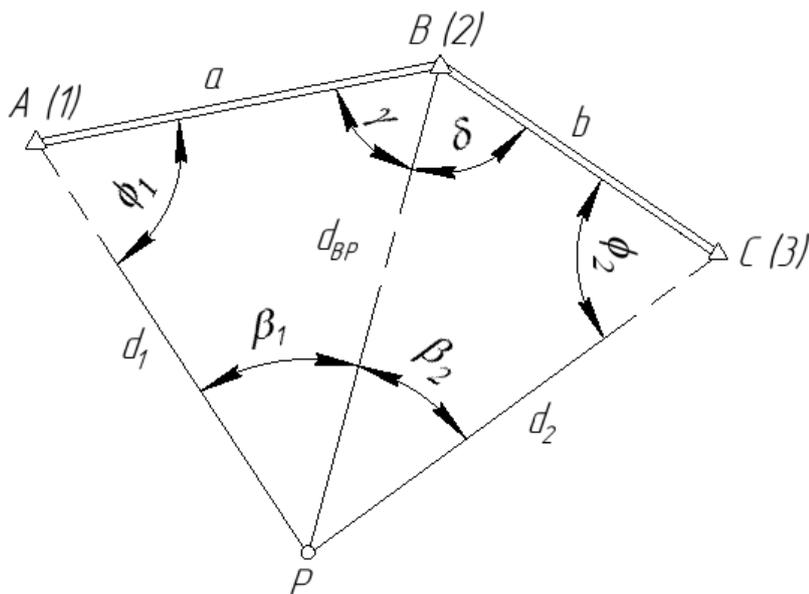


Рисунок 8 – Обратная геодезическая засечка

$$M_p = \frac{d_{BP} * m''_{\beta}}{p'' \sin(\varphi_1 + \varphi_2)} \sqrt{\frac{d_1^2}{a^2} + \frac{d_2^2}{b^2}} \quad (4)$$

Углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  вычисляются путем геометрических преобразований;  $d_1, d_2, d_{BP}, a, b$  – определяются путем решения обратной геодезической задачи

Таблица 12 – Результаты погрешности выдаваемый каждым прибором

Значение средней квадратичной погрешности определяемой $M_p$ , м	
Теодолит	0,04
Электронный тахеометр	0,01

Оценка точности наглядно показала, что погрешность теодолита и электронного тахеометра для задачи обратная угловая засечка равняется 0,04м и 0,01м соответственно.

**Заключение:** в результате изучения был получен материал, анализ которого позволил заключить, что применение прямой и обратной угловой засечки с использованием теодолита или электронного тахеометра дает практически идентичные результаты при погрешности для прямой засечки: 0,03 и 0,02 и для обратной засечки: 0,04 и 0,01. Применение метода определения координат станции обратной угловой засечкой является более предпочтительным поскольку полевые измерения проводятся в данном случае на одной точке.

Методология прогнозирования сбоев IoT-устройств позволяет повысить эффективность технического обслуживания и минимизировать простои. Однако, следует отметить, что конкретная реализация методологии может различаться в зависимости от особенностей конкретного проекта и доступных ресурсов.

### Список литературы

1. Прямая и обратная геодезические задачи [Электронный ресурс]. – URL: <https://mylektsii.ru/1-103759.html> (Дата обращения: 23.04.2023).

2. StudFiles [Электронный ресурс]. – URL: <https://studfile.net/preview/4405175/> (Дата обращения: 20.05.2023).
3. Промтерра [Электронный ресурс]. – URL: <https://www.prom-terra.ru/articles/chto-takoe-obratnaya-i-pryamaya-geodezicheskaya-zadacha-sut-metody-resheniya-naznachenie.html> (Дата обращения: 03.05.2023)
4. «topuch» [Электронный ресурс]. – URL: <https://topuch.com/pryamaya-geodezicheskaya-uglovaya-zasechka/index.html> (Дата обращения: 15.05.23)
5. «2CAD» [Электронный ресурс]. – URL: <https://2cad.ru/blog/geodesy/obratnay-zasechka/> (Дата обращения: 23.05.2023).

## References

1. Pryanaya i obratnaya geodezicheskie zadachi [Elektronnyj resurs]. – URL: <https://mylektsii.su/1-103759.html> (Data obrashcheniya: 23.04.2023).
  2. StudFiles [Elektronnyj resurs]. – URL: <https://studfile.net/preview/4405175/> (Data obrashcheniya: 20.05.2023).
  3. Promterra [Elektronnyj resurs]. – URL: <https://www.prom-terra.ru/articles/chto-takoe-obratnaya-i-pryamaya-geodezicheskaya-zadacha-sut-metody-resheniya-naznachenie.html> (Data obrashcheniya: 03.05.2023)
  4. «topuch» [Elektronnyj resurs]. – URL: <https://topuch.com/pryamaya-geodezicheskaya-uglovaya-zasechka/index.html> (Data obrashcheniya: 15.05.23)
  5. «2CAD» [Elektronnyj resurs]. – URL: <https://2cad.ru/blog/geodesy/obratnay-zasechka/> (Data obrashcheniya: 23.05.2023).
-