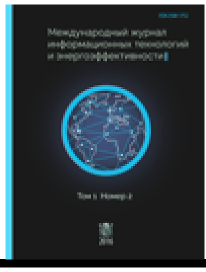
Киселев Н.С. Построение матричной модели для анализа непрерывно дискретных систем // Международный журнал информационных технологий и энергоэффективности. – 2023. – Т. 8 № 5(31)ч.2 с. 39–47

Международный журнал информационных технологий и энергоэффективности

Сайт журнала:
http://www.openaccessscience.ru/index.php/ijcse/



УДК 004.02

ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЧНОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ АНАЛИЗА НЕПРЕРЫВНО ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Киселев Н.С.
ФГБОУ ВО " Казанский Государственный Энергетический Университет", Казань Россия (420066, Республика Татарстан, город Казань, Красносельская ул, д. 51), *e-mail: kis_48@mail.ru*

Рассмотрен метод построения модели для анализа непрерывных и дискретных процессов на примере логических и электронных схем. Предложен метод построения объединенной непрерывно-дискретной модели на основе матрицы смежности.

Ключевые слова: Модель непрерывно дискретных систем, матрицы смежности, матрицы инцидентности.

CONSTRUCTION OF A MATRIX MODEL FOR THE ANALYSIS OF CONTINUOUSLY DISCRETE SYSTEMS

Kiselev N.S.
Kazan State Power Engineering University, Kazan, Russia (420066, Republik of Tatarstan, Kazan city, Krasnoselskaya street, 51), e-mail: kis_48@mail.ru

The method of constructing a model for the analysis of continuous and discrete processes on the example of logic and electronic circuits is considered. A method for constructing a combined continuous-discrete model based on the adjacency matrix is proposed.

Keywords: Model of continuously discrete systems, adjacency matrices, incidence matrices.

Многие современные технические системы представляют из себя совокупность устройств с непрерывными и дискретными технологическими процессами. К непрерывным, например, относятся электрические, химические, тепловые, гидродинамические, диффузионные и ряд других. Дискретные процессы реализуют, как правило, системы управления, ручного или автоматического.

Большую часть в этих системах составляют системы, связанные с передачей и преобразованием различного рода потоков - информационные, энергетические, потоки жидкостей и газов и др.

Для анализа таких систем на разных уровнях детализации в качестве моделей используют разнообразный математический аппарат: численные методы решения дифференциальных уравнений, алгебру логики, теорию графов, сети Петри, теорию массового обслуживания и др., с хорошо разработанными методами решения [1, 2, 3].

Разнообразие методов и моделей создает определенные трудности:

- для более полного анализа требуемой задачи необходимо построение нескольких моделей для разных уровней детализации поставленной задачи
- повышаются профессиональные требования к специалистам, поскольку они должны: владеть большим разнообразием методов моделирования на разных уровнях, уметь сопрягать модели разных уровней и интерпретировать результаты их моделирования.

В работе предлагается объединить непрерывные и дискретные модели в рамках единого матричного подхода к построению единой модели.

Рассмотрим построение гибридной модели на примере схемы содержащей электрические (аналоговые) и логические (дискретные) элементы.

Для логических схем в качестве модели удобно использовать матричную модель вида [4]

$$\boldsymbol{S_o} = \boldsymbol{M}\ \boldsymbol{\Theta}\ \boldsymbol{S_i} \qquad (1)$$

или

$$\begin{vmatrix} s_{o1} \\ s_{o2} \\ \dots \\ s_{on} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{21} & \dots & m_{n1} \\ m_{12} & m_{22} & \dots & m_{n2} \\ \dots & .. & \dots & \dots \\ m_{1n} & m_{2n} & \dots & m_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \odot_1 \\ \odot_2 \\ \dots \\ \odot_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s_{i1} \\ s_{i2} \\ \dots \\ s_{in} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

Пусть задана логическая схема и ее граф (Рисунок 1).

Вершинам графа соответствуют элементы схемы, включая входы и выходы, а ребрам – связи между элементами. Направление ребер соответствует направлению передачи сигналов (потоков информации).

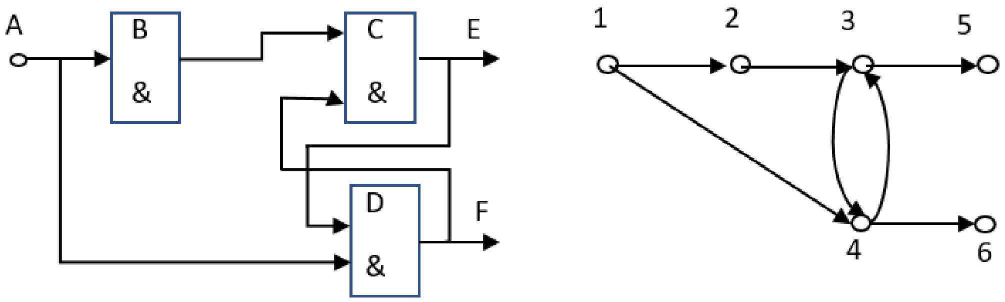


Рисунок 1 – Схема и ее граф

Для графа и схемы построим матрицу смежности и вектор функций элементов (Рисунок 2).

Каждая строка матрицы определяет входы в элемент (например: в элемент – ***B***, вершина графа 2 входом является элемент ***A***, вершина графа 1). Функция элемента ¬& ***(И-НЕ***). Задав начальное значение на входе схемы, можно вычислить значение на элементе ***B*** (строка матрицы 2). Пробегая все строки можно определить состояние всех элементов в некоторый начальный момент времени. Данный алгоритм описывается выражениями 1 и 2.

№ п/п	1	2	3	4	5	6
1						
2	1					
3		1		1		
4	1		1			
5			1			
6				1		

Функция элементов схемы
вход
¬&
¬&
¬&
выход
выход

Рисунок 2 – Матрица смежности с функциями элементов схемы

При построении математической модели электрических схем также используется граф схемы. При этом вершинам графа соответствуют цепи, а ребрам компоненты (двухполюсные).

Рассмотрим построение матрицы смежности для аналоговой схемы. В качестве примера возьмем рисунки из [5] (Рисунок 3).

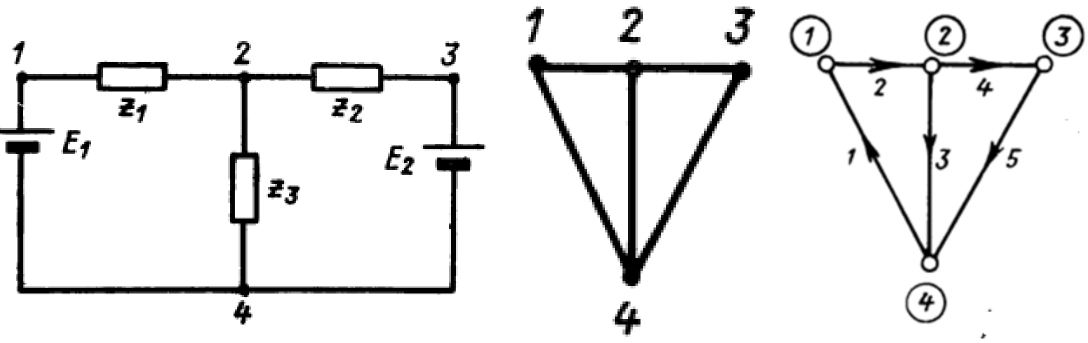


Рисунок 3 – Схема, её граф и ориентированный граф

На основе ориентированного графа можно построить матрицу инциденций (соединений), представленную на Рисунке 4. Матрица показывает соединение узлов и ветвей ориентированного графа. В каждом столбце единицами отмечены в строках, соответствующих узлам, начала (-1) и концы ветвей (1).

Узлы	Ветви				
	1	2	3	4	5
1	1	-1			
2		1	-1	-1	
3				1	-1
4	-1		1		1

Рисунок 4 – Матрица инциденций (матрица соединений)

Известно, что данную матрицу можно использовать для записи законов Кирхгофа. Обозначив матрицу буквой $\boldsymbol{A}$ выражение закона Кирхгофа для токов (ЗКТ) запишется в виде $\boldsymbol{AI=0}$, а для закона Кирхгофа для напряжений $\boldsymbol{A^tU} = \boldsymbol{0}$, где $\boldsymbol{t}$ – знак транспонирования.

Матрица смежности для этой же схемы представлена на Рисунке 5. имеет блочный вид. Два блока выделены жирными линиями. Обозначим блоки матрицы символами $\boldsymbol{B}$ для правого верхнего и $\boldsymbol{C}$ для левого нижнего.

	①	②	③	④	1	2	3	4	5
①					1				
②						1			
③								1	
④							1		1
1				1					
2	1								
3		1							
4		1							
5			1						

Рисунок 5 – Матрица смежности

Сопоставляя эти две матрицы можно заметить, что первая матрица $\boldsymbol{A}$ получается из второй, если у неё взять левый нижний блок, умножить на (-1) и транспонировать, а затем сложить с правым верхним блоком. Также можно получить транспонированную матрицу $\boldsymbol{A^t}$. Для этого левый нижний блок надо умножить на (- 1), и сложить с транспонированной правым верхним блоком.

Или $\boldsymbol{A} = \mathrm{B} + \mathrm{C}^{\boldsymbol{t}} * (\boldsymbol{-1})$ (3)

и$\boldsymbol{A^t} = (\boldsymbol{-1}) * \boldsymbol{C} + \boldsymbol{B^t}$ (4)

Полученная модифицированная матрица представлена на Рисунке 6.

	①	②	③	④	1	2	3	4	5
①					1	-1			
②						1	-1	-1	
③								1	-1
④					-1		1		1
1	1			-1					
2	-1	1							
3		-1		1					
4		-1	1						
5			-1	1					

Рисунок 6 – Структурная матрица для ЗК

Уравнения законов Кирхгофа на основе полученной матрицы можно записать следующим образом

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{A^t} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \boldsymbol{U} \\ \boldsymbol{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Для получения полной системы уравнений необходимо добавить компонентные уравнения для токов и напряжений [6].

Построить полную систему уравнений из исходной модели в матричном виде можно, если в граф на Рисунке 3 добавить дополнительные вершины (Рисунок 7.).

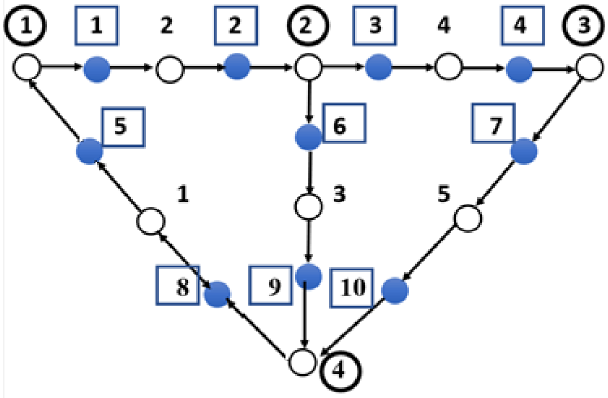


Рисунок 7 – Граф с дополнительными вершинами.

Дополнительные вершины выделены цветом и отмечены номерами в квадратиках. Матрица смежности для данного графа представлена на Рисунке 8.

В полученной матрице невозможно увидеть блоки как-то сходные с блоками матрицы на Рисунке 5. Однако при перестановке строк и одноименных столбцов можно получить матрицу, представленную на Рисунке 9.,

Очевидно, что в новой матрице есть два блока таких же, как и на Рисунке 5, и два единичных блока.

Перестановка строк и одноименных столбцов равносильна перенумерации вершин графа. Дополнительная нумерация на Рисунке 9 соответствует графу на Рисунке 10.

—	1	2	3	4	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1														1					
2											1								
3													1						
4																		1	1
1																	1		
2										1									
3															1				
4												1							
5																1			
1	1																		
2						1													
3		1																	
4								1											
5					1														
6		1																	
7			1																
8				1															
9							1												
10									1										

Рисунок 8 – Матрица смежности для графа с дополнительными вершинами

											1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		1	2	3	4	1	2	3	4	5	5	2	9	4	10	8	1	6	3	7
	1										1									
	2											1								
	3													1						
	4												1		1					
	1															1				
	2																1			
	3																	1		
	4																		1	
	5																			1
1	5					1														
2	2						1													
3	9							1												
4	4								1											
5	10									1										
6	8				1															
7	1	1																		
8	6		1																	
9	3		1																	
10	7			1																

Рисунок 9 – Матрица с переставленными строками и столбцами

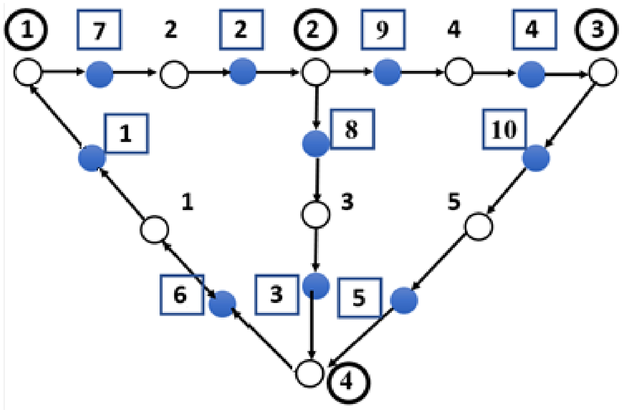


Рисунок 10 – Граф с перенумерованными вершинами

В символьном виде матрицу на Рисунке 7 можно представить следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{I} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{6}$$

А с учетом преобразований 3 и 4.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{I} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{A^t} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{7}$$

Выражение (7) является основой для системы уравнений для токов, напряжений и компонентных уравнений.

В результате полученных рассуждений видно, что системы уравнений электрических схем можно получить не только из матриц инциденций, но и из матриц смежности. При этом получаются как топологические, так и компонентные уравнения. Таким образом, использование матриц смежности, как для логических, так и электрических схем, с методологической точки зрения упрощает алгоритм построения разнородных моделей.

Список литературы

1. Парийская Е.Ю., Сравнительный анализ математических моделей и подходов к моделированию и анализу непрерывно–дискретных систем. Дифференциальные уравнения и процессы управления, №1, 1997, Электронный журнал, с.91-120
2. Якимов И.М., Кирпичников А.П., Мокшин В.В. Моделирование сложных систем в среде имитационного моделирования GPSS W с расширенным редактором. Вестник казанского технологического университета, Том: 17, №: 4 2014, с.: 298-303
3. Киселев Н.С. Матричный метод моделирования непрерывно-дискретных схем //Информатика 87. 2 Всесоюзная конференция. Ереван: Арм.ССР,1987.- с.251
4. Киселев Н.С. Матричная модель для анализа логических схем большой размерности//Исследования по информатике. Выпуск 1. Научно-практическое издание. Институт проблем информатики АН РТ. Сборник трудов. Казань: Отечество, 1999, с.95-100
5. Ильин В.И. Машинное проектирование электронных схем. - М.: Энергия, 1972
6. Шиманская-Семенова, Т.А. Применение матричных моделей для расчета и анализа режимов электрических сетей: методическое пособие по выполнению курсовой работы и изучению дисциплины «Математические модели в энергетике» для студентов специальности 1-43 01 02 «Электроэнергетические системы и сети» / Т.А. Шиманская-Семёнова. – Минск: БНТУ, 2010. – 158 с.

References

1. Pariyskaya E.Yu., Comparative analysis of mathematical models and approaches to modeling and analysis of continuous–discrete systems. Differential Equations and Control Processes, No. 1, 1997, Electronic Journal, pp.91-120
2. Yakimov I.M., Kirpichnikov A.P., Mokshin V.V. Modeling of complex systems in the GPSS W simulation environment with an extended editor. Bulletin of Kazan Technological University, Volume: 17, no.: 4 2014, pp.: 298-303
3. Kiselev N.S. Matrix method of modeling continuous-discrete circuits //Informatics 87. 2 All-Union Conference. Yerevan: Arm.SSR, 1987.- p.251
4. Kiselev N.S. Matrix model for the analysis of large-dimensional logic circuits//Computer science research. Issue 1. Scientific and practical edition. Institute of Computer Science Problems of the Academy of Sciences of the Republic of Tatarstan. Collection of works. Kazan: Fatherland, 1999, pp.95-100
5. Ilyin V.I. Machine design of electronic circuits. - M.: Energiya, 1972
6. Shimanskaya-Semenova, T.A. Application of matrix models for calculation and analysis of modes of electric networks: a methodological guide for the course work and the study of the

discipline "Mathematical models in power engineering" for students of specialty 1-43 01 02 "Electric power systems and networks" / T.A. Shimanskaya-Semenova. – Minsk: BNTU, 2010. – p.158