Канарейкин А.И. Двумерное температурное поле в прямоугольной пластине с переменной теплопроводностью по одной координате // Международный журнал информационных технологий и энергоэффективности. – 2023. – Т. 8 № 3(29) с. 124–130

ОТКРЫТАЯ НАУКА
издательство

Международный журнал информационных технологий и энергоэффективности

Сайт журнала:
http://www.openaccessscience.ru/index.php/ijcse/

УДК 536.12

ДВУМЕРНОЕ ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЕ С ПЕРЕМЕННОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ ПО ОДНОЙ КООРДИНАТЕ

Канарейкин А.И.
Российский государственный геологоразведочный университет имени Серго Орджоникидзе (МГРИ), Москва, Россия (117485, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 23), e-mail: kanareykins@mail.ru

Работа относится к вопросам стационарного теплопереноса. Объектом исследования является прямоугольная пластина. При этом задаётся линейный закон изменения теплопроводности по одной из координат. Что усложняет сам процесс решения. Теплообмен на двух противоположных концах пластины происходит при граничных условиях третьего рода, на остальных двух - теплообмена нет. Решение находится методом разложения в ряд Фурье. В результате чего получено аналитическое выражение распределения температурного поля пластины. Также в работе были рассмотрены частные случаи. Один из которых приводит поставленную задачу к задаче с граничными условиями третьего рода, что говорит о достоверности полученных результатов.

Ключевые слова: прямоугольная пластина, стационарная теплопроводность, температурное поле, ряд Фурье, метод разделения переменных, функции Бесселя.

TWO-DIMENSIONAL TEMPERATURE FIELD IN A RECTANGULAR PLATE WITH VARIABLE THERMAL CONDUCTIVITY IN ONE COORDINATE

Kanareykin A. I.,
Sergo Ordzhonikidze Russian State University for Geological Prospecting, Moscow, Russia (117485, Moscow, Miklukho-Maklaya st., 23), e-mail: kanareykins@mail.ru

The work relates to the issues of stationary heat transfer. The object of the study is a rectangular plate. In this case, a linear law of change in thermal conductivity is set along one of the coordinates. Which complicates the decision process itself. Heat exchange at the two opposite ends of the plate occurs under boundary conditions of the third kind, there is no heat exchange at the other two. The solution is found by the Fourier series decomposition method. As a result, an analytical expression of the distribution of the temperature field of the plate is obtained. Special cases were also considered in the work. One of which leads the problem to a problem with boundary conditions of the third kind, which indicates the reliability of the results obtained.

Keywords: rectangular plate, stationary thermal conductivity, temperature field, Fourier series, method of separation of variables, Bessel functions.

Как известно, многие процессы происходят с участием теплообмена. Такие процессы играют немалую роль. Повышение энергетической эффективности и компактности теплообменных аппаратов тесно связано с интенсификацией процессов теплообмена [1-6].

Отдельно можно выделить двумерные задачи теплопроводности [7-9]. Подобные задачи обычно возникают при описании процессов теплопередачи в тонких пластинах. При этом существуют различные методы решения подобных задач. Для их решения существуют аналитические методы, однако решение некоторых неоднородных и нелинейных задач теплопроводности получить аналитическими методами не представляется возможным. Решение такого рода задач проводится с использованием численных методов. [10-14].

В работе рассмотрен случай с линейным изменением теплопроводности по одной координате с заданными граничными условиями второго и третьего рода. Рассмотрим однородную пластину с заданными размерами (Рисунок 1).

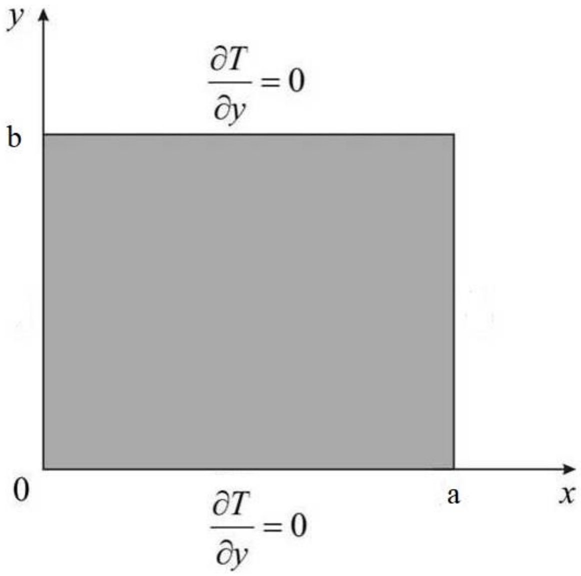

Рисунок 1 – Прямоугольная пластина с заданными условиями.

Для нахождения решения поставленной задачи необходимо решить двумерное дифференциальное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0 \qquad (1)$$

В случае изменения теплопроводности по одной из координат уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0 \qquad (2)$$

При этом нелинейное уравнение (2) должно удовлетворять следующим граничным условиям: на двух противоположных концах теплообмен отсутствует

$$\frac{\partial T(x,0)}{\partial y}=0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial T(x,b)}{\partial y}=0, \qquad (4)$$

а на остальных теплообмен осуществляется за счёт конвекции, подчиняющегося закону Ньютона и к ним ещё подводится тепло, которое является функцией от координаты y

$$-\lambda \frac{\partial T(0,y)}{\partial x} + \alpha_1 T(0,y) = q_1(y) \tag{5}$$

$$-\lambda \frac{\partial T(a,y)}{\partial x} + \alpha_2 T(a,y) = q_2(y) \tag{6}$$

где α_1 и α_2 - заданные коэффициенты теплоотдачи, q_1и q_2 – плотности тепловых потоков.

Пусть коэффициент теплопроводности λ линейно зависит от координаты x следующим образом

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 x \tag{7}$$

Тогда функциональную зависимость теплопроводности можно представить в виде

$$\lambda = \lambda_1 \rho \tag{8}$$

В этом случае уравнение теплопроводности (2) перепишется следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial T}{\partial \rho}\right) + \rho \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \tag{9}$$

а граничные условия (4, 5) примут следующий вид:

$$-\lambda_1 x_0 \frac{\partial T(x_0,y)}{\partial \rho} + \alpha_1 T(x_0,y) = q_1(y) \tag{10}$$

$$-\lambda_1 (x_0+a) \frac{\partial T(x_0+a,y)}{\partial x} + \alpha_2 T(x_0+a,y) = q_2(y) \tag{11}$$

Решение поставленной задачи будем искать в виде функционального ряда [15]

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(\rho) \cos \frac{n\pi y}{b} \tag{12}$$

Подставим это решение в уравнение (9). После разделения переменных получим следующее выражение

$$\frac{d^2 T_n}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dT_n}{d\rho} - \frac{n^2\pi^2}{b^2} T_n = 0, n = 0,1,2,\ldots,\infty \tag{13}$$

Его решением является [16]

$$T_n = A_n I_0\left(\frac{n\pi\rho}{b}\right) + B_n K_0\left(\frac{n\pi\rho}{b}\right), n = 0,1,2,\ldots,\infty \tag{14}$$

где $I_0\left(\frac{n\pi\rho}{b}\right)$ и $K_0\left(\frac{n\pi\rho}{b}\right)$ - модифицированные функции Бесселя нулевого порядка [17-19].

При n = 0 уравнение (12) примет вид

$$\frac{d^2 T}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dT}{d\rho} = 0 \tag{15}$$

Его решением является

$$T_0 = A_0 + B_0 \ln \rho \tag{16}$$

Для получения граничных условий разложим функции $q_1(y)$ и $q_2(y)$ в ряд Фурье

$$q_1(y)=\sum_{n=0}^{\infty} q_{1n}\cos\frac{n\pi y}{b} \tag{17}$$

$$q_2(y)=\sum_{n=0}^{\infty} q_{2n}\cos\frac{n\pi y}{b} \tag{18}$$

Коэффициенты A_0и B_0 находятся из решения системы уравнений

$$-\lambda_1 B_0+\alpha_1(A_0+B_0\ln x_0)=q_{10} \tag{19}$$

$$-\lambda_1 B_0+\alpha_2[A_0+B_0\ln(x_0+a)]=q_{20} \tag{20}$$

откуда

$$A_0=\frac{\left[\alpha_2\ln(x_0+a)-\lambda_1\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\right]q_{10}+(\lambda_1-\alpha_1\ln x_0)q_{20}}{\alpha_1\alpha_2\ln\left(1+\dfrac{a}{x_0}\right)} \tag{21}$$

$$B_0=\frac{\alpha_1 q_{20}-\alpha_2 q_{10}}{\alpha_1\alpha_2\ln\left(1+\dfrac{a}{x_0}\right)} \tag{22}$$

Для определения неизвестных коэффициентов A_n и B_n необходимо будет решить систему уравнений по формулам Крамера.

Проведём исследование полученных результатов. Рассмотрим первый случай: пусть граничные условия слева и справа одинаковые. Тогда

$$T=T_0=\frac{q}{\alpha} \tag{23}$$

Это означает, что температурное поле пластины постоянна, то есть не зависит от координаты и определяется уравнением Ньютона – Рихмана.

Во втором случае нет подвода теплоты, тогда

$$T=0 \tag{24}$$

Как видим температура пластины равна нулю. Что и следовало ожидать.

В настоящей работе была решена задача о нахождения температурного поля в прямоугольной пластине с заданным линейным изменением теплопроводности по одной из координат при адибатически изолированных противоположных границ и при заданных граничных условиях третьего рода на двух других. Достоверность результатов подтверждается тем, что один из частных случаев приводит поставленную задачу к задаче с граничными условиями третьего рода.

Список литературы

1. Li, Ji Difference Scheme for Hyperbolic Heat Conduction Equation with Pulsed Heating Boundary. Journal of Thermal Science, 20009. (2) pp.152 – 157.
2. Yang, C Y Estimation of the periodic thermal conditions on the non—Fourier fin problem. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2005. 48 pp.3506 – 3515.

3. Xuefang, L, Christofer, D.M. Influence of size effect and boundary conditions on temperature overshooting in nanoscale thermal conduction. Chinese Science Bulletin, 2014, 59 (12) pp.1334 – 1339.
4. Yankovskii, A.P. Refined modeling of flexural deformation of layered plates with a regular structure made from nonlinear hereditary materials // Mechanics of Composite Materials. 2018. Vol. 53. No. 6. pp. 705-724. DOI: 10.1007/s11029-018-9697-9.
5. Геренштейн, А.В., Бездетнов, А.Л. Температурное поле неоднородного стержня // Сервис технических систем - основа безопасного функционирования машин и оборудования предприятий АПК: мат. Междунар. науч.-практ. конф. Института агроинженерии, Челябинск, 15-17 февраля 2018. Троицк: Южно-Уральский государственный аграрный университет, 2018. С. 102-108.
6. Геренштейн, А.В., Машрабов, Н., Королькова, Л.И., Геренштейн, Е.А. Дифференциально-разностный метод для третьей смешанной задачи одномерной теплопроводности с непостоянными коэффициентами. В сборнике: Актуальные вопросы агроинженерных наук в сфере технического сервиса машин, оборудования и безопасности жизнедеятельности: теория и практика. Материалы национальной научной конференции Института агроинженерии. Под редакцией С.А. Гриценко. 2020. С. 82-91.
7. Мищенко, А.В. Моделирование двумерных температурных полей в структурно-неоднородных стержнях с разрывными геометрическими параметрами // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2018. № 1 (709). С. 5-15. DOI: 10.32683/0556-1052-2018-709-1-5-15.
8. Шит, М.Л., Пацюк, В.И., Журавлев, А.А., Бурчу, В.И., Тимченко, Д.В. Управление теплообменным аппаратом с переменной площадью поверхности теплообмена // Проблемы региональной энергетики. 2019. №1 (39).
9. Метод дополнительных искомых функций в задачах теплопроводности с переменными физическими свойствами среды / Е.В. Котова, А.В. Еремин, В.А. Кудинов и др. // Вестник ИГЭУ. – 2019. – Вып. 2. – С. 59–70.
10. Канарейкин, А. И. Охлаждение бесконечной прямоугольной пластины с адиабатически изолированной стороной при граничных условиях третьего рода // Вестник Международной академии холода. 2022. № 3. С 74-79.
11. Канарейкин, А. И. Процесс охлаждения бесконечной прямоугольной пластины при граничных условиях второго и третьего рода // Международный журнал информационных технологий и энергоэффективности. 2022. Т. 7. № 3-1 (25). С. 40-45.
12. Канарейкин, А. И. Охлаждение бесконечной прямоугольной пластины при граничных условиях второго и третьего рода // Chronos. 2022. Т. 7. № 9 (71). С. 36-41.
13. Канарейкин, А. И. Процесс охлаждения бесконечной прямоугольной пластины при разных граничных условиях // Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением. 2022. № 11. С. 8-12.
14. Канарейкин, А. И. Распределение температурного поля в прямоугольной пластине при граничных условиях первого рода // Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением. 2022. № 11. С. 3-7.

15. Канарейкин, А. И. Стационарное температурное поле в прямоугольной пластине с переменной теплопроводностью по одной координате // Вестник Международной академии холода. 2023. № 1. С 99-104.
16. Канарейкин, А. И. Стационарное температурное поле в прямоугольной пластине с линейным изменением теплопроводности по одной координате // Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением. 2023. № 1. С. 11-16.
17. Карташов, Э.М., Кудинов, А. Аналитические методы теории теплопроводности и её приложений. М.: Ленанд. 2018. 1072 с.
18. Несис, Е.И. Методы математической физики. М.: Просвещение. 1977. 199 с.
19. Канарейкин, А. И. Применение математического аппарата Берса к решению задачи теплопроводности // В сборнике: Научные труды Калужского государственного университета имени К.Э. Циолковского. Сер. "Естественные науки" Калужский государственный университет им. К.Э. Циолковского. 2018. С. 175-178.

References

1. Li, Ji Difference Scheme for Hyperbolic Heat Conduction Equation with Pulsed Heating Boundary. Journal of Thermal Science, 20009. (2) pp.152 – 157.
2. Yang, C Y Estimation of the periodic thermal conditions on the non—Fourier fin problem. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2005. 48 pp.3506 – 3515.
3. Xuefang, L, Christofer, D.M. Influence of size effect and boundary conditions on temperature overshooting in nanoscale thermal conduction. Chinese Science Bulletin, 2014, 59 (12) pp.1334 – 1339.
4. Yankovskii, A.P. Refined modeling of flexural deformation of layered plates with a regu-lar structure made from nonlinear hereditary materials // Mechanics of Composite Materials. 2018. Vol. 53. No. 6. pp. 705-724. DOI: 10.1007/s11029-018-9697-9.
5. Gerenshtein, A.V., Bezdetnov, A.L. Temperature field of an inhomogeneous rod // Service of technical systems - the basis for the safe functioning of machines and equipment of agricultural enterprises: mat. International scientific-practical. conf. Institute of Agricultural Engineering, Chelyabinsk, February 15-17, 2018. Troitsk: South Ural State Agrarian University, 2018. pp. 102-108.
6. Gerenshtein, A.V., Mashrabov, N., Korolkova, L.I., Gerenshtein, E.A. Differential-difference method for the third mixed problem of one-dimensional heat conduction with non-constant coefficients. In the collection: Topical issues of agroengineering sciences in the field of technical service of machines, equipment and life safety: theory and practice. Proceedings of the National Scientific Conference of the Institute of Agroengineering. Edited by S.A. Gritsenko. 2020. pp. 82-91.
7. Mishchenko, A.V. Modeling of two-dimensional temperature fields in structurally inhomogeneous rods with discontinuous geometric parameters. Construction. 2018. No. 1 (709). C. 5-15. DOI: 10.32683/0556-1052-2018-709-1-5-15.
8. Shit, M.L., Patsyuk, V.I., Zhuravlev, A.A., Burchu, V.I., Timchenko, D.V. Control of a heat exchanger with a variable heat exchange surface area // Problems of Regional Energy. 2019. No. 1 (39).

9. The method of additional desired functions in heat conduction problems with variable physical properties of the medium / E.V. Kotova, A.V. Eremin, V.A. Kudinov et al. // Vestnik ISPU. - 2019. - Issue. 2. – pp. 59–70.
10. Kanareikin, AI Cooling of an infinite rectangular plate with an adiabatically isolated side under boundary conditions of the third kind. Bulletin of the International Academy of Cold. 2022. No. 3. pp 74-79.
11. Kanareikin, AI Process of cooling an infinite rectangular plate under boundary conditions of the second and third kind // International Journal of Information Technologies and Energy Efficiency. 2022. Vol. 7. No. 3-1 (25). pp. 40-45.
12. Kanareikin, A. I. “Cooling of an infinite rectangular plate under boundary conditions of the second and third kind,” Chronos. 2022. Vol. 7. No. 9 (71). pp. 36-41.
13. Kanareikin, AI Process of cooling an infinite rectangular plate under different boundary conditions // Forging and Stamping Production. Processing of materials by pressure. 2022. No. 11. pp. 8-12.
14. Kanareikin, AI Distribution of the temperature field in a rectangular plate under boundary conditions of the first kind. Processing of materials by pressure. 2022. No. 11. pp. 3-7.
15. Kanareikin, AI Stationary temperature field in a rectangular plate with variable thermal conductivity along one coordinate // Bulletin of the International Academy of Cold. 2023. No. 1. pp 99-104.
16. Kanareikin, AI Stationary temperature field in a rectangular plate with a linear change in thermal conductivity along one coordinate // Forging and stamping production. Processing of materials by pressure. 2023. No. 1. pp. 11-16.
17. Kartashov, E.M., Kudinov, A. Analytical methods of the theory of heat conduction and its applications. M.: Lenand. 2018. p.1072
18. Nesis, E.I. Methods of mathematical physics. M.: Enlightenment. 1977. p.199
19. Kanareykin, A. I. Application of the mathematical apparatus of Bers to the solution of the problem of thermal conductivity // In the collection: Scientific works of the Kaluga State University named after K.E. Tsiolkovsky. Sir. "Natural Sciences" Kaluga State University named after K.E. Tsiolkovsky. 2018. pp. 175-178.