Куркин Е.В., Осипов О.В. Распространение электромагнитных волн в периодически неоднородной искусственной среде из диэлектрических и киральных слоев // Международный журнал информационных технологий и энергоэффективности. — 2023. —

T. 8 № 1(27) c. 57–65



Международный журнал информационных технологий и энергоэффективности

Сайт журнала:

http://www.openaccessscience.ru/index.php/ijcse/



УДК 537.87

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПЕРИОДИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ ИСКУССТВЕННОЙ СРЕДЕ ИЗ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И КИРАЛЬНЫХ СЛОЕВ

¹Куркин Е.В., ²Осипов О.В.

 $\Phi \Gamma F O V B O$ Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, Самара, Россия (443010, г. Самара, ул. Льва Толстого, 23), email: 1 Kurkin@bk.ru, 2 osipov.o@mail.ru

В работе построена математическая модель кирального метаматериала на основе суперпозиции модели Максвелла-Гарнетта для описания пространственной структуры метаматериала и дисперсионной модели Кондона. Получены выражения для векторов электромагнитного поля в киральном метаматериале. Построена математическая модель продольно протяженного периодически неоднородного кирального метаматериала.

Ключевые слова: метаматериал, искусственная киральная среда, оптически активная среда, СВЧ излучение, электромагнитная волна, коэффициент отражения, коэффициент прохождения, периодическая неоднородность

ELECTROMAGNETIC WAVES PROPAGATION IN A PERIODICALLY INHOMOGENEOUS ARTIFICIAL MEDIUM OF DIELECTRIC AND CHIRAL LAYERS

¹Kurkin E.V., ²Osipov O.V.

Volga Region State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia (443010, Samara, Lva Tolstogo Str., 23), email: ¹Kurkin@bk.ru, ²osipov.o@mail.ru

A mathematical model of the chiral metamaterial is constructed based on the superposition of the Maxwell-Garnett model to describe the spatial structure of the metamaterial and the Condon dispersion model. Expressions for electromagnetic field vectors in a chiral metamaterial are obtained. A mathematical model of a longitudinally extended periodically inhomogeneous chiral metamaterial is constructed.

Keywords: metamaterial, artificial optically active medium, chiral medium, microwave radiation. electromagnetic wave, reflection coefficient, transmission coefficient, periodic inhomogeneity..

Понятие «киральность» означает свойство некоторого объекта не совмещаться со своим зеркальным отражением в пространстве при таких действиях, как перемещение, совмещение, вращение [1]. Можно заметить, что киральность относится к положению объекта в пространстве, то есть является геометрическим свойством.

В настоящее время значительный интерес в электродинамике СВЧ представляет собой исследование и создание искусственных сред, называемых метаматериалами [2-5]. Они, как правило, создаются с использованием мелких частиц, собственный размер которых намного меньше длины электромагнитный волны, которые располагаются в среде-контейнере из

Куркин Е.В., Осипов О.В. Распространение электромагнитных волн в периодически неоднородной искусственной среде из диэлектрических и киральных слоев // Международный журнал информационных технологий и энергоэффективности. − 2023. − T. 8 № 1(27) с. 57–65

материала с другими электрофизическими параметрами. Отдельным классом метаматериалов являются киральные среды [6-12], которые состоят из диэлектрического контейнера, в котором равномерно размещены и хаотически ориентированы проводящие микроэлементы киральной (зеркально асимметричной) формы. В киральной среде распространяются две волны с право (ПКП) и левокруговыми (ЛКП) поляризациями с разными постоянными распространения. Также следует заметить, что для описания свойств взаимодействия киральной среды с электромагнитной волной кроме диэлектрической и магнитной проницаемостей вводится относительный параметр киральности. Материальные уравнения для киральной среды имеют вид [6-8]:

$$\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon \vec{\mathbf{E}} + i \chi \vec{\mathbf{H}}; \ \vec{\mathbf{B}} = \mu \vec{\mathbf{H}} \pm i \chi \vec{\mathbf{E}}, \tag{1}$$

где 8 — относительная эффективная диэлектрическая проницаемость;

μ — относительная магнитная проницаемость;

χ — относительный параметр киральности метаматериала.

Верхние и нижние знаки в (1) соответствуют правым и левым формам киральных элементов. Уравнения (1) записаны в Гауссовой системе единиц.

С другой стороны, значительное внимание уделяется построению математических моделей киральных сред, учитывающих дисперсию материальных параметров и гетерогенность (двухкомпонентность) [13-16].

В работе рассматривается периодически неоднородный киральный метаматериал (КММ), состоящий из чередующихся планарных киральных слоев. Для описания свойств киральных слоев в работе используется математическая модель, учитывающая свойства гетерогенности, дисперсии диэлектрической проницаемости и дисперсии параметра киральности [15]. По сути, периодически неоднородный КММ — это многослойная структура, состоящая из периодически чередующегося набора планарных микрослоев с различными значениями материальных параметров (например, параметра киральности). В таких структурах возникает возможность частотно селективного управления прохождением волн различной поляризации.

Рассмотрим математическую модель КММ, используемого в работе. Для описания гетерогенности используется модель Максвелла Гарнетта [17]:

$$\varepsilon = \varepsilon_{c} \frac{1 + 2\alpha \varepsilon_{x}}{1 - \alpha \varepsilon_{x}}; \quad \varepsilon_{x} = \frac{\varepsilon_{s} - \varepsilon_{c}}{\varepsilon_{s} + 2\varepsilon_{c}}, \quad (2)$$

где є — относительная эффективная диэлектрическая проницаемость метаматериала (как пространственной структуры, состоящей из контейнера и компонентов);

 $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathrm{c}}$ — относительная диэлектрическая проницаемость контейнера;

 ${f \epsilon}_{s}$ — относительная диэлектрическая проницаемость области, занятой компонентом.

Дисперсия диэлектрической проницаемости и параметра киральности описывается моделями Лоренца и Кондона, соответственно [13]:

$$\varepsilon_{\rm s}(\omega) = \frac{\Omega_{\rm s}\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}; \chi(\omega) = \frac{\Omega_{\chi}\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}, (3)$$

Куркин Е.В., Осипов О.В. Распространение электромагнитных волн в периодически неоднородной искусственной среде из диэлектрических и киральных слоев // Международный журнал информационных технологий и энергоэффективности. — 2023. — Т. 8 № 1(27) с. 57–65

где $\, \omega_0 \,$ — резонансная частота кирального элемента (определяется из квазистатической модели для конкретного типа элемента);

у — частота демпфирования;

 Ω_{ϵ} — «сила» резонанса диэлектрической проницаемости;

 Ω_{γ} — «сила» резонанса параметра киральности.

Соотношения (1)-(3) представляют собой математическую модель КММ, применяемую в работе для описания слоев.

Рассмотрим распространение плоской электромагнитной волны через периодически неоднородную систему из чередующихся киральных слоев с различными значениями параметра киральности (Рисунок 1).

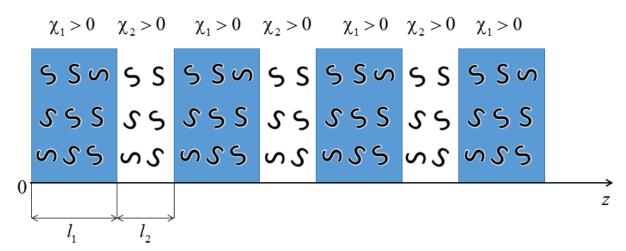


Рисунок 1 – Геометрия задачи

В первом киральном слое напряженности электрического поля волн ПКП и ЛКП определялись из уравнения Хилла [18]:

$$\frac{d^2 E_{R,L}}{dz^2} + k_1^2 \left(1 \pm \alpha_1 \chi_1 \right) E_{R,L} = 0. \tag{4}$$

где $k_1 = k_0 \sqrt{\epsilon_1 \mu_1}$ — волновое число для плоской однородной волны в среде с параметрами ϵ_1 и μ_1 ;

 $n_1 = \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}$ — показатель преломления кирального слоя;

 $ec{E}_{\scriptscriptstyle R}$ — напряженность электрического поля волны ПКП;

 $ec{E}_{\scriptscriptstyle L}$ — напряженность электрического поля волны ЛКП; $lpha_{\scriptscriptstyle 1}=2/n_{\scriptscriptstyle 1}$.

Для определения электромагнитного поля на отрезке $\left[l_2 < z < l_1 + l_2\right]$ была использована теорема Флоке, согласно которой для одной из двух волн решение уравнения (4) можно записать в виде [19]:

$$E_{RL}^{(3)}(z) = F_{RL}(z)\vec{E}_{RL}^{(1)}(z-d), \tag{5}$$

Куркин Е.В., Осипов О.В. Распространение электромагнитных волн в периодически неоднородной искусственной среде из диэлектрических и киральных слоев // Международный журнал информационных технологий и энергоэффективности. — 2023. — Т. 8 № 1(27) с. 57–65

где $F_{R,L}(z)$ — функции, периодические с периодом $d=l_1+l_2$.

В качестве функций $F_{R,L}(z)$ удобно была выбрана гармоническую функцию вида:

$$F_{R,L}(z) = e^{i\gamma_{R,L}d}, (6)$$

где $\gamma_{R,L}$ — постоянные распространения волн ПКП и ЛКП в периодическинеоднородной системе, которые находятся как функции волновых чисел $\tilde{k}_1^{(R,L)} = k_0 \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \sqrt{\left(1 \pm \alpha_1 \chi_1\right)}, \ \tilde{k}_2^{(R,L)} = k_0 \sqrt{\epsilon_2 \mu_2} \sqrt{\left(1 \pm \alpha_2 \chi_2\right)}$ и толщин слоев $l_{1,2}$.

С использованием граничных условий на границах раздела слоев было получено дисперсионное уравнение для собственных волн исследуемой периодически неоднородной структуры:

$$\cos(\gamma_{R,L}d) = \cos(\tilde{k}_{1}^{(R,L)}l_{1})\cos(\tilde{k}_{2}^{(R,L)}l_{2}) - \frac{(\tilde{k}_{1}^{(R,L)})^{2} + (\tilde{k}_{2}^{(R,L)})^{2}}{2\tilde{k}_{1}^{(R,L)}\tilde{k}_{2}^{(R,L)}}\sin(\tilde{k}_{1}^{(R,L)}l_{1})\sin(\tilde{k}_{1}^{(R,L)}l_{2}), \qquad (7)$$

$$\tilde{k}_{1,2}^{(R,L)} = k_{0}\sqrt{\epsilon_{1,2}\mu_{1,2}}\sqrt{1 \pm \alpha_{1,2}\chi_{1,2}}; \alpha_{1,2} = 2/\sqrt{\epsilon_{1,2}\mu_{1,2}}.$$

Дисперсионные уравнения описывают собственные волны, распространяющиеся в периодически неоднородной структуре из чередующихся киральных слоев с параметрами $\{l_1, \epsilon_1, \mu_1, \chi_1\}$ и $\{l_2, \epsilon_2, \mu_2, \chi_2\}$. Если $\chi_1 \chi_2 > 0$, то киральные слои состоят из зеркально-асимметричных элементов одного и того же типа; если же $\chi_1 \chi_2 < 0$, то один киральный слой создан на основе правовинтовых, а другой — на основе левовинтовых киральных элементов.

Коэффициенты отражения и прохождения волн через структуру определяются через матрицы передачи слоев:

$$\begin{pmatrix} T_{+} \\ T_{-} \end{pmatrix} = \prod_{j=l}^{N} \ddot{Z}_{j} \begin{pmatrix} A_{+} \\ A_{-} \end{pmatrix};$$

$$R_{+} = \sqrt{1 - T_{+}^{2}}; R_{-} = \sqrt{1 - T_{+}^{2}},$$
(8)

где

$$\vec{Z}_{j} = \begin{pmatrix} Z_{11j}(\omega) & Z_{12j}(\omega) \\ Z_{21j}(\omega) & Z_{22j}(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\frac{\chi_{j}(\omega)}{\varepsilon_{j}(\omega)} & -\frac{\sin\theta}{\varepsilon_{j}(\omega)} \\ -\frac{n_{cj}^{2}(\omega)}{\sin\theta\varepsilon_{j}(\omega)} & -i\frac{\chi_{j}(\omega)}{\varepsilon_{j}(\omega)} \end{pmatrix};$$

$$n_{c_i}^2(\omega) = \varepsilon_i(\omega)\mu_i - \chi_i^2(\omega),$$

В соотношениях (9) введены следующие обозначения: T_+, T_- — коэффициенты прохождения волн ПКП и ЛКП в область за КММ (за всеми слоями КММ); R_+, R_- —

Куркин Е.В., Осипов О.В. Распространение электромагнитных волн в периодически неоднородной искусственной среде из диэлектрических и киральных слоев // Международный журнал информационных технологий и энергоэффективности. — 2023. — Т. 8 № 1(27) с. 57–65

коэффициенты отражения волн ПКП и ЛКП в область перед КММ; j — порядковый номер слоя.

На Рисунке 2 приведены дисперсионные характеристики собственных волн ПКП и ЛКП, то есть зависимости нормированных постоянных распространения $\gamma_{R,L}d$ от нормированной частоты k_0l_1 . Волны ПКП отмечены сплошными линиями; волны ЛКП — штриховыми.

Значения параметров расчета:

$$\varepsilon_{c1} = \varepsilon_{c2} = 2.0; \ \mu_1 = \mu_2 = 2.2; \ \chi_1 = 0.3; \ \chi_2 = -0.3; \ \alpha_1 = 0.1; \ \alpha_2 = 0.1; \ k_0 A_1 = 0.05; \ k_0 A_2 = 0.05; \ k_0 l_2 = 2.$$

Как видно из Рисунка 2 каждая волна в периодически неоднородной структуре разбивается на две пространственные гармоники, которые распространяются с различными фазовыми скоростями. Заметим, что в различных частотных диапазонах волны ПКП и ЛКП могут обладать как нормальной, так и аномальной дисперсией. Это следствие, периодической неоднородности структуры. Также можно заметить, что волны ПКП и ЛКП в интервалах прозрачности имеют различные постоянные распространения, причем у обеих пространственных гармоник. Как видно из Рисунка 2, в КММ существуют области прозрачности и непрозрачности структуры, которые для волн ПКП и ЛКП совпадают. Это значит, что КММ работает в двух режимах — пропускания обеих волн ПКП и ЛКП и непропускания обеих волн ПКП и ЛКП.

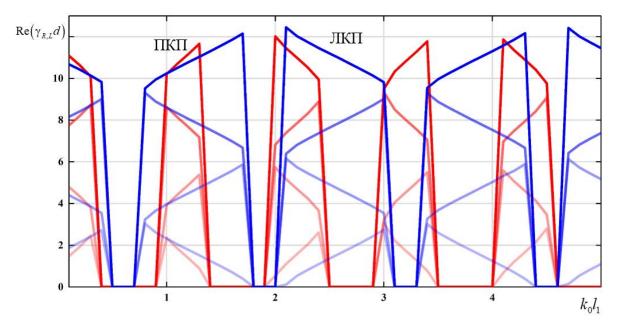


Рисунок 2 – Дисперсионные характеристики

Куркин Е.В., Осипов О.В. Распространение электромагнитных волн в периодически неоднородной искусственной среде из диэлектрических и киральных слоев // Международный журнал информационных технологий и энергоэффективности. − 2023. − T. 8 № 1(27) с. 57–65

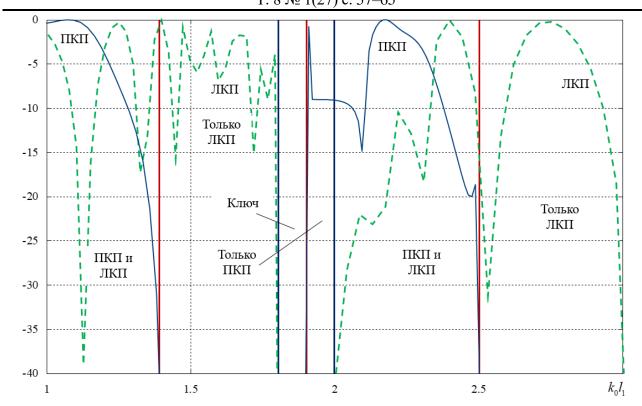


Рисунок 3 – Частотные зависимости прошедших мощностей волн ПКП и ЛКП

На Рисунке 3 приведены графики зависимостей прошедших мощностей волн ПКП и ЛКП от частоты. Сплошной линией показана зависимость $201 \mathrm{g} \left|T_{+}\right|^{2}$; штриховой линией — зависимость $201 \mathrm{g} \left|T_{-}\right|^{2}$. Как видно из рисунка 3, прошедшая мощность в интервалах непрозрачности меньше -40 дБ, что свидетельствует об отсутствии прохождения волны через КММ. Также можно отметить, что в интервалах прозрачности мощности волн ПКП и ЛКП различаются, а также наблюдается ряд локальных минимумов прохождения, связанных с резонансными частотами кирального слоя метаматериала. КММ выполняет роль полосового фильтра для одной из волн ПКП или ЛКП, а также блокирует обе волны ПКП и ЛКП. Причем для него наблюдается несколько полос непропускания волн ПКП и ЛКП.

Таким образом, рассмотренная в работе неоднородная киральная структура может служить базовым элементом при создании частотно селективных фильтров СВЧ для волн с право и левокруговыми поляризациями, при разработке экранирующих структур СВЧ в заданном частотном интервале и других устройствах, обладающим свойствами частотной и поляризационной селективности.

Список литературы

- 1. Физический энциклопедический словарь / Под ред. А.М. Прохорова. М.: Большая российская энциклопедия, 1995. 928 с.
- 2. Capolino F. Theory and Phenomena of Metamaterials. Boca Raton: Taylor & Francis CRC Press, 2009. 992 p.

Куркин Е.В., Осипов О.В. Распространение электромагнитных волн в периодически неоднородной искусственной среде из диэлектрических и киральных слоев // Международный журнал информационных технологий и энергоэффективности. − 2023. − Т. 8 № 1(27) с. 57–65

- 3. Engheta N., Ziolkowski R.W. Metamaterials: Physics and engineering explorations. Hoboken: Wiley, 2006. 414 p.
- 4. Iyer A. K., Alù A., Epstein A. Metamaterials and Metasurfaces Historical Context, Recent Advances, and Future Directions // IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2020. V. 68. №3. P. 1223-1231. DOI: 10.1109/TAP.2020.2969732.
- 5. Caloz C., Itoh T. Electromagnetic metamaterials: Transmition line theory and microwave applications. The engineering approach. New York. Wiley Interscience, 2006.
- 6. Lindell I. V. Electromagnetic waves in chiral and bi-isotropic media / I.V. Lindell, A.H. Sihvola, S.A. Tretyakov, A.J. Viitanen. London: Artech House, 1994. 291 p.
- 7. Lakhtakia A., Time-harmonic electromagnetic fields in chiral media. Lecture Notes in Physics / A. Lakhtakia, V.K. Varadan, V.V. Varadan. Berlin: Heidelberg and Boston: Springer-Verlag, 1989. 121 p.
- 8. Caloz C., Sihvola A. Electromagnetic Chirality, Part 1: The Microscopic Perspective [Electromagnetic Perspectives] // IEEE Antennas and Propagation Magazine, 2020. V. 62. №1. P. 58-71. DOI: 10.1109/MAP.2019.2955698.
- 9. Неганов В.А., Осипов О.В. Отражающие, волноведущие и излучающие структуры с киральными элементами. М.: Радио и Связь, 2006. 280 с.
- 10. Третьяков С.А. Электродинамика сложных сред: киральные, би-изотропные и некоторые бианизотропные материалы // Радиотехника и электроника, 1994. Т.39. №10. С.1457-1470.
- 11. Lakhtakia A., Varadan V.V., Varadan V.K. Field equations, Huy-gens's prin-ciple, integral equations, and theorems for radiation and scattering of electro-magnetic waves in isotropic chiral media // Journal of the Optical Soc. Of America, 1988. V.5. №2. P.175-184.
- 12. Каценеленбаум Б.З., Коршунова Е.Н., Сивов А.Н., Шатров А.Д. Киральные электродинамические объекты // Успехи физических наук, 1997. Т.167. №11. С.1201-1212.
- 13. Prudêncio F.R., Silveirinha M.G. Optical isolation of circularly polarized light with a spontaneous magnetoelectric effect // Phys. Rev. A., 2016. V.93. P.043846.
- Semchenko I.V., Tretyakov S.A., Serdyukov A.N. Research on chiral and bianisotropic media in Byelorussia and Russia in the last ten years // Progress In Electromagnetics Research, 1996. V.12. pp. 335-370.
- 15. Аралкин М.В., Дементьев А.Н., Осипов О.В. Математические модели киральных метаматериалов на основе многозаходных проводящих элементов // Физика волновых процессов и радиотехнические системы, 2020. Т. 23. № 1. С. 8-19.
- 16. Аралкин М.В., Дементьев А.Н., Осипов О.В. Исследование электромагнитных характеристик планарных киральных метаструктур на основе составных спиральных компонентов с учетом гетерогенной модели Бруггемана // Физика волновых процессов и радиотехнические системы, 2020. Т. 23. № 3. С. 44-55.
- 17. Сушко М.Я., Криськив С.К. Метод компактных групп в теории диэлектрической проницаемости гетерогенных систем // Журнал технической физики, 2009. Т.79. Вып.3. С. 97-101.

Куркин Е.В., Осипов О.В. Распространение электромагнитных волн в периодически неоднородной искусственной среде из диэлектрических и киральных слоев // Международный журнал информационных технологий и энергоэффективности. − 2023. − Т. 8 № 1(27) с. 57–65

- 18. Осипов О.В. Распространение электромагнитных волн в периодически неоднородной структуре из чередующихся киральных слоев // Электромагнитные волны и электронные системы, 2006. №12. С.4-8.
- 19. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1979. 383 с.

References

- 1. Physical Encyclopedic dictionary / Edited by A.M. Prokhorov. M.: The Great Russian Encyclopedia, 1995. p.928
- 2. Capolino F. Theory and Phenomena of Metamaterials. Boca Raton: Taylor & Francis CRC Press, 2009.p. 992
- 3. Engheta N., Ziolkowski R.W. Metamaterials: Physics and engineering explorations. Hoboken: Wiley, 2006.p. 414
- 4. Iyer A. K., Alù A., Epstein A. Metamaterials and Metasurfaces Historical Context, Recent Advances, and Future Directions // IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2020. V. 68. №3. P. 1223-1231. DOI: 10.1109/TAP.2020.2969732.
- 5. Caloz C., Itoh T. Electromagnetic metamaterials: Transmition line theory and microwave applications. The engineering approach. New York. Wiley Interscience, 2006.
- 6. Lindell I. V. Electromagnetic waves in chiral and bi-isotropic media / I.V. Lindell, A.H. Sihvola, S.A. Tretyakov, A.J. Viitanen. London: Artech House, 1994. p.291
- 7. Lakhtakia A.. Time-harmonic electromagnetic fields in chiral media. Lecture Notes in Physics / A. Lakhtakia, V.K. Varadan, V.V. Varadan. Berlin: Heidelberg and Boston: Springer-Verlag, 1989.p. 121
- 8. Caloz C., Sihvola A. Electromagnetic Chirality, Part 1: The Microscopic Perspective [Electromagnetic Perspectives] // IEEE Antennas and Propagation Magazine, 2020. V. 62. No. 1. pp. 58-71. DOI: 10.1109/MAP.2019.2955698.
- 9. Neganov V.A., Osipov O.V. Reflecting, waveguide and radiating structures with chiral elements. M.: Radio and Communications, 2006. p. 280
- 10. Tretyakov S.A. Electrodynamics of complex media: chiral, bi-isotropic and non-bianisotropic materials // Radio Engineering and Electronics, 1994. Vol.39. No.10. pp.1457-1470.
- 11. Lakhtakia A., Varadan V.V., Varadan V.K. Field equations, Huy-gens's prin-ciple, inte-gral equations, and theorems for radiation and scattering of electro-magnetic waves in isotropic chi-ral media // Journal of the Optical Soc. Of America, 1988. V.5. No.2. pp.175-184.
- 12. Katsenelenbaum B.Z., Korshunova E.N., Sivov A.N., Shatrov A.D. Chiral electrodynamic objects // Successes of Physical Sciences, 1997. Vol.167. No. 11. pp.1201-1212.
- 13. Prudêncio F.R., Silveirinha M.G. Optical isolation of circularly polarized light with a spontaneous magnetoelectric effect // Phys. Rev. A., 2016. V.93. P.043846.
- 14. Semchenko I.V., Tretyakov S.A., Serdyukov A.N. Research on chiral and bianisotropic media in Byelorussia and Russia in the last ten years // Progress In Electromagnetics Research, 1996. V.12. pp. 335-370.
- 15. Aralkin M.V., Dementyev A.N., Osipov O.V. Mathematical models of chiral metamaterials based on multi-input conducting elements // Physics of wave processes and radio engineering systems, 2020. Vol. 23. No. 1. pp. 8-19.

- Куркин Е.В., Осипов О.В. Распространение электромагнитных волн в периодически неоднородной искусственной среде из диэлектрических и киральных слоев // Международный журнал информационных технологий и энергоэффективности. − 2023. − Т. 8 № 1(27) с. 57–65
- 16. Aralkin M.V., Dementyev A.N., Osipov O.V. Research electromagnetic characteristics of planar chiral metastructures based on composite spiral components taking into account the heterogeneous Bruggeman model // Physics of wave processes and radio-technical systems, 2020. Vol. 23. No. 3. pp. 44-55.
- 17. Sushko M.Ya., Kriskiv S.K. Method of compact groups in the theory of dielectric permittivity of heterogeneous systems // Journal of Technical Physics, 2009. Vol.79. Issue 3. pp. 97-101.
- 18. Osipov O.V. Propagation of electromagnetic waves in a periodically inhomogeneous structure of alternating chiral layers // Electromagnetic waves and electronScientific systems, 2006. No.12. pp.4-8.
- 19. Vinogradova M.B., Rudenko O.V., Sukhorukov A.P. Wave theory. M.: Nauka, 1979.p.383