



Международный журнал информационных технологий и энергоэффективности

Сайт журнала:

<http://www.openaccessscience.ru/index.php/ijcse/>



УДК 536.2

ПРОЦЕСС ОХЛАЖДЕНИЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО РОДА

Канарейкин А.И.

Российский государственный геологоразведочный университет имени Серго Орджоникидзе Россия (117485, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая ул., 23), e-mail: kanareykins@mail.ru

Работа посвящена нестационарному процессу теплопроводности. В данной статье рассматривается вопрос о нахождении закона изменения температурного поля от времени в прямоугольной пластине при граничных условиях второго и третьего рода, заданных одновременно на стенках пластины. Само решение получено на основе метода Фурье в виде ряда, содержащего тригонометрические и экспоненциальные функции. Также были рассмотрены частные случаи. Достоверность полученного результата подтверждается тем, что один из частных случаев приводит поставленную задачу к задаче с граничными условиями первого рода, когда температура поверхности постоянна.

Ключевые слова: теплообмен, теплопроводность, уравнение теплопроводности, закон распределения температуры, температурное поле, граничные условия второго рода, граничные условия третьего рода, нестационарный теплообмен.

THE COOLING PROCESS OF AN INFINITE RECTANGULAR PLATE UNDER BOUNDARY CONDITIONS OF THE SECOND AND THIRD KIND

Kanareykin A. I.

Sergo Ordzhonikidze Russian State University for Geological Prospecting, Russia (117485, Moscow, Miklukho-Maklaya st.), e-mail: kanareykins@mail.ru

The work is devoted to the non-stationary process of thermal conductivity. In this article, the question of finding the law of temperature field change from time in a straight-carbon plate under boundary conditions of the second and third kind, set simultaneously on the plate walls, is considered. The solution itself is obtained on the basis of the Fourier method in the form of a series containing trigonometric and exponential functions. Special cases were also considered. The reliability of the obtained result is confirmed by the fact that one of the special cases leads the problem to a problem with boundary conditions of the first kind, when the surface temperature is constant.

Keywords: heat exchange, thermal conductivity, heat equation, temperature distribution law, heat exchange, temperature field, boundary conditions of the second kind, boundary conditions of the third kind, non-stationary heat exchange.

Как известно процессы теплообмена играют исключительную роль как в природе, так и в технике [1-4]. Особый научный интерес представляют работы, описывающие нестационарный теплообмен в современных теплообменных элементах теплообменного оборудования [5, 6]. При этом вопросам расчета температурных полей при наличии адиабатической изоляции посвящено несколько работ [7, 8].

Рассмотрим однородную пластину толщиной δ с постоянными физическими характеристиками (рис. 1). При этом в начальный момент времени $t = 0$ температура в пластине распределена равномерно и равна T_0 . Необходимо найти закон распределения температурного поля в пластине в виде следующей функции: $T = f(x, t)$.

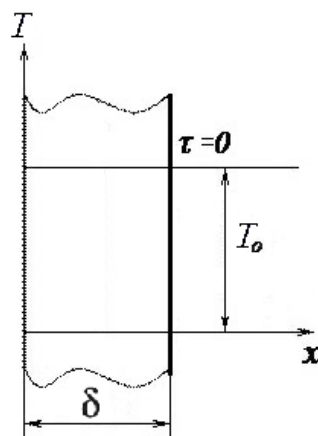


Рисунок 1 – Прямоугольная пластина с заданными начальными условиями¹

Для нахождения решения задачи необходимо решить одномерное дифференциальное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{c\rho} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (1)$$

удовлетворяющее следующим условиям: начальному

$$T|_{t=0} = T_0 \quad (2)$$

и граничным: справа есть теплообмен

$$\frac{\partial T}{\partial x} + hT|_{x=\delta} = 0 \quad (3)$$

а слева нет

$$\frac{\partial T}{\partial x}|_{x=0} = 0 \quad (4)$$

где: λ – коэффициент теплопроводности, ρ – плотность материала пластины, c – теплоемкость пластины, h – коэффициент теплоотдачи между средой и поверхностью тела.

Для начала введём новую переменную

¹ Источник: автор статьи

$$\tau = \frac{\lambda}{c\rho} t \quad (5)$$

В этом случае уравнение (1) упростится

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (6)$$

Решение будем искать в виде произведения двух функций: одна из которых $X(x)$ – функция координаты, другая – $Y(\tau)$ – времени

$$T(x, \tau) = X(x)Y(\tau) \quad (7)$$

Для нахождения решения воспользуемся методом разделения переменных

$$X''/X = -Y''/Y \quad (8)$$

Применяя метод Фурье, приравняем обе функции к постоянной k^2 . В результате этого действия получим линейные дифференциальные уравнения

$$X'' + k^2 X = 0 \quad (9)$$

$$Y'' + k^2 Y = 0 \quad (10)$$

Решение уравнения (9) находим в виде тригонометрических функций [9]

$$X(x) = A \cos kx + B \sin kx \quad (11)$$

Решение второго уравнения (8) находим в виде экспоненциальной функции

$$Y(x) = C e^{-k^2 \tau} \quad (12)$$

Найдём постоянные A , B , C , и X так, чтобы удовлетворить граничным условиям (3) и (4). Из условия (3) следует что

$$X'(\delta) + hX(\delta) = 0 \quad (13)$$

или

$$-Ak \sin 0 + Bk \cos 0 = 0 \quad (14)$$

Из него следует, что $B = 0$. Тогда уравнения (11) примет вид

$$X(x) = A \cos kx \quad (15)$$

Теперь применим второе граничное условие (4)

$$X'(0) = 0 \quad (16)$$

или

$$-Ak \sin k\delta + Ah \cos k\delta = 0 \quad (17)$$

Откуда

$$\operatorname{ctg} k \delta = \frac{k}{h} \quad (18)$$

Преобразуем правую часть

$$\operatorname{ctg} k \delta = \frac{\delta k}{\delta h} \quad (19)$$

Обозначим произведение $k \delta$ за μ . Тогда выражение (19) примет вид

$$\operatorname{ctg} \mu = \frac{\mu}{Bi} \quad (20)$$

где

$$Bi = \delta h = \frac{\alpha \delta}{\lambda} \quad (21)$$

безразмерное число Био [10].

Само уравнение (20) с постоянными коэффициентами является трансцендентным, поэтому он имеет бесчисленное множество решений. Оно хорошо решается графическим методом. Откуда получим множество функций

$$X_n(x) = A_n \cos\left(\frac{\mu_n x}{\delta}\right) \quad (22)$$

подставляя (22) и (12) в (7), получим множество функций температуры

$$T_n = M_n \cos\left(\frac{\mu_n x}{\delta}\right) e^{-\left(\frac{\mu_n}{a}\right)^2 \tau} \quad (23)$$

Чтобы удовлетворить начальному условию (2), составим бесконечную сумму

$$T(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n = \sum_n M_n \cos\left(\frac{\mu_n x}{\delta}\right) e^{-\left(\frac{\mu_n}{a}\right)^2 \tau} \quad (24)$$

и подберем коэффициенты M_n таким образом, чтобы ряд при $x \rightarrow a$ сходил к начальному условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n \cos\left(\frac{\mu_n x}{\delta}\right) = T_0 \quad (25)$$

Поэтому необходимо положить числа M_n , равными обобщённым коэффициентам Фурье

$$M_n = \frac{\int_0^{\delta} T_0 \cos\left(\frac{\mu_n x}{\delta}\right) dx}{\int_0^{\delta} \cos^2\left(\frac{\mu_n x}{\delta}\right) dx} = \frac{T_0 \frac{\delta}{\mu_n} \sin \mu_n}{\frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{4\mu_n} \sin 2\mu_n} = T_0 \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} \quad (26)$$

Подставляя теперь значения M_n в (25), получаем формулу для определения температурного поля в несимметрично охлаждаемой однородной пластине

$$T(x, \tau) = \sum_n T_0 \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} \cos\left(\frac{\mu_n x}{\delta}\right) e^{-\left(\frac{\mu_n}{a}\right)^2 \tau} \quad (27)$$

В безразмерной форме уравнение (27) запишется как

$$\theta(x, F_0) = \frac{T}{T_0} = \sum_n \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} \cos\left(\frac{\mu_n x}{\delta}\right) e^{-\mu_n^2 F_0} \quad (28)$$

где

$$F_0 = \frac{a \tau}{\delta^2} \quad (29)$$

критерий Фурье.

Проведём исследование поведения температурного поля пластины при различных значениях числа Bi . Сначала рассмотрим случай малых значений числа Bi . В этом случае температурное поле примет вид

$$\theta = e^{-BiF_0} \quad (30)$$

Откуда следует, что выражение (30) не зависит от X . Это означает, что температурное поле меняется во времени по экспоненциальному закону.

Случай, когда число Bi стремится к бесконечности приводит к тому, что температура поверхности пластины равна температуре окружающей среды. В этом случае получаем задачу с граничными условиями первого рода, когда температура поверхности постоянна.

Таким образом работа посвящена вопросам нестационарного теплообмена. Было получено аналитическое выражение для нахождения температурного поля в пластине бесконечной длины при граничных условиях второго и третьего рода. Согласно полученному аналитическому выражению температурное поле пластины при охлаждении в любой момент времени имеет вид несимметричной кривой в виде косинусоиды и уменьшается во времени по экспоненциальному закону. Полученный результат может быть полезен для дальнейших теоретических исследований в области нестационарной теплопроводности.

Список литературы

1. Лыков, А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высш. шк., 1967. – 600 с.
2. Беляев, Н.М., Рядно, А.А. Методы теории теплопроводности. Т. 1. – М.: Высш. шк., 1982. – 328 с.
3. Несис, Е.И. Методы математической физики. М.: Просвещение, 1977. - 199 с.
4. Баскаков, А.П. Теплотехника. М.: Энергоатомиздат, 1991. - 244 с.
5. Власов, Н.М. Тепловыделяющие элементы ядерных ракетных двигателей / Н.М. Власов, И.И. Федик. – М.: ЦНИИ атоминформ, 2001. – 208с.
6. Иванов, Д.Ю. Уточнение коллокационного метода граничных элементов вблизи границы области в случае двумерных задач нестационарной теплопроводности с граничными условиями второго и третьего рода // Вестник Томского государственного

- университета. Математика и механика, 2019. № 57. - С. 5-25. DOI: 10.17223/19988621/57/1.
7. Канарейкин, А. И. Распределение температуры в теле эллиптического сечения с внутренним источником тепла при адиабатической изоляции половины поверхности // Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением, 2021. № 5. - С. 20-25.
 8. Kanareykin, A. Temperature distribution in an elliptical body with an internal heat source with partial adiabatic isolation // E3S Web of Conferences, 2021. Vol. 258. 09071. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202125809071>.
 9. Канарейкин, А. И. Применение математического аппарата Берса к решению задачи теплопроводности // В сборнике: Научные труды Калужского государственного университета имени К.Э. Циолковского. Сер. "Естественные науки" Калужский государственный университет им. К.Э. Циолковского, 2018. -С. 175-178.
 10. Kanareykin, A.I. Determination of the thickness of the flame front us-ing mathematical modeling of the temperature field // 2022 IOP Conf. Ser.: Earth Environ. Sci. 990 012030. DOI: 10.1088/1755-1315/990/1/012030

References

1. Lykov, A.V. Theory of thermal conductivity. - М.: Higher. school, 1967. - 600 p.
 2. Belyaev, N.M., Ryadno, A.A. Methods of the theory of heat conduction. Т. 1. - М.: Vyssh. school, 1982. - 328 p.
 3. Nesis, E.I. Methods of mathematical physics. Moscow: Enlightenment, 1977. - 199 p.
 4. Baskakov, A.P. Heat engineering. М.: Energoatomizdat, 1991. - 244 p.
 5. Vlasov, N.M. Fuel elements of nuclear rocket engines / N.M. Vlasov, I.I. Fedik. – М.: TsNII atominform, 2001. – 208p.
 6. Ivanov, D.Yu. Refinement of the collocation method of boundary elements near the boundary of the region in the case of two-dimensional problems of non-stationary heat conduction with boundary conditions of the second and third kind. Bulletin of the Tomsk State University. Mathematics and Mechanics, 2019. No. 57. - P. 5-25. DOI: 10.17223/19988621/57/1.
 7. Kanareikin, AI Temperature distribution in an elliptical body with an internal heat source with adiabatic insulation of half of the surface // Forging and Stamping Production. Processing of materials by pressure, 2021. No. 5. - pp. 20-25.
 8. Kanareykin, A. Temperature distribution in an elliptical body with an internal heat source with partial adiabatic isolation // E3S Web of Conferences, 2021. Vol. 258. 09071. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202125809071>.
 9. Kanareikin, A.I. Application of the mathematical apparatus of Bers to the solution of the problem of heat conduction // In the collection: Scientific works of the Kaluga State University named after K.E. Tsiolkovsky. Ser. "Natural Sciences" Kaluga State University. K.E. Tsiolkovsky, 2018. -pp.175-178.
 10. Kanareykin, A.I. Determination of the thickness of the flame front us-ing mathematical modeling of the temperature field // 2022 IOP Conf. Ser.: Earth Environ. sci. 990 012030. DOI: 10.1088/1755-1315/990/1/012030.
-