



Международный журнал информационных технологий и энергоэффективности

Сайт журнала:

<http://www.openaccessscience.ru/index.php/ijcse/>



УДК 536.21

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО СОСТОЯНИЯ ПЛОСКОГО ТЕПЛОВЫДЕЛЯЮЩЕГО ЭЛЕМЕНТА С ВНУТРЕННИМ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЕМ

¹ Зинина С.А., ² Попов А.И., Брагин Д.М., Еремин А.В.

ФГБОУ ВО Самарский государственный технический университет, Самара, Россия (443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244), e-mail: ¹ sofazinina4@gmail.com, ² pixinot@icloud.com

В данной статье численным методом решена задача теплопроводности в плоском тепловыделяющем элементе (ТВЭЛ) с внутренними источниками теплоты. Внутренний источник теплоты в данной задаче изменяется по линейному закону. Решение осуществлялось путем реализации метода конечных разностей в ПО Mathcad. Суть метода конечных разностей заключается в замене имеющихся дифференциальных уравнений разностными схемами. В данном решении применялась явная разностная схема.

Ключевые слова: метод конечных разностей, тепловыделяющий элемент, критерий Померанцева, внутренний источник, граничные условия первого рода.

INVESTIGATION OF THE TEMPERATURE STATE OF A FLAT HEAT-GENERATING ELEMENT WITH INTERNAL HEAT DISSIPATION

¹ Zinina S.A., ² Popov A.I., Bragin D.M., Eremin A.V.

Samara State Technical University, Samara, Russia (443100, Samara, Molodogvardeyskaya str., 244), e-mail: ¹ sofazinina4@gmail.com, ² pixinot@icloud.com

In this article, the problem of thermal conductivity in a flat fuel element with internal heat sources is solved numerically. The internal heat source in this problem varies according to a linear law. The solution was implemented by implementing the finite difference method in Mathcad software. The essence of the finite difference method is to replace the existing differential equations with difference schemes. In this solution, an explicit difference scheme was used.

Keywords: finite difference method, fuel element, Pomerantsev criterion, internal source, boundary conditions of the first kind.

Введение

Исследование тепловых процессов в телах с внутренним тепловыделением имеет большое прикладное значение. Выделение теплоты может происходить вследствие протекания электрического тока по проводникам, индукционном нагреве, при реакциях ядерного деления в тепловыделяющих элементах (ТВЭЛ). Например в ТВЭЛ гетерогенных ядерных реакторов, от температурного режима зависят прочностные свойства конструктивных элементов, скорость протекания реакции и другие режимные параметры. Экспериментальное изучение тепловых процессов в телах с внутренним тепловыделением

представляет серьезные трудности, а наибольшее распространение получили теоретические методы их исследования (численные и аналитические). С использованием математической модели могут быть изучены закономерности протекания реальных процессов. Так, например, в работе М. В. Васильевой, Д. А. Стальнова «Математическое моделирование термомеханического состояния тепловыделяющего элемента» [1] рассматривается численное моделирование термического состояния ТВЭЛ. В основе их работы лежит метод конечных элементов с использованием программного пакета FEniCS. Моделирование теплопереноса осуществлялось с учетом внутреннего источника теплоты, представленного параболическим уравнением, для аппроксимации которого применялась неявная разностная схема по времени. В работе [2] проводилось исследование нелинейной задачи теплообмена в конструкции, состоящей из источника тепла, газового зазора и оболочки. Решение отыскивалось в двумерной и трехмерной областях при наличии внутренних источников энергии. Численное решение основано на применении метода конечных элементов. В работах [3 – 7] приводятся результаты теоретических исследований температурного состояния твердых тел с внутренними источниками тепла. В работах [8 – 10] излагаются инженерные методы построения решений задач стационарной и нестационарной теплопроводности. С помощью интегрального метода теплового баланса на основе введения фронта температурного возмущения и при использовании дополнительных граничных условий авторами были получены аналитические решения задач теплопроводности с переменными начальными условиями, с переменными во времени граничными условиями и внутренними источниками теплоты. С использованием теории обобщенных функций рассмотрены методы получения линейных и нелинейных задач теплопроводности для многослойных конструкций с внутренними источниками теплоты. В работе [11] на основе систем из тождественных равенств, образованных $2n$ – кратными интегралами от искомой температурной функции и интегральными граничными характеристиками, получены аналитические решения краевой задачи нестационарной теплопроводности для регулярного и нерегулярного режимов процесса нагрева (охлаждения) пластины с граничным условием первого рода.

В настоящей работе использован метод, согласно которому численное решение задачи осуществляется путем замены дифференциальных уравнений разностными схемами. Метод конечных разностей представляет собой сеточный метод, в качестве разностной схемы принята явная схема решения.

Постановка задачи

Уравнение теплового баланса в одномерном виде с внутренними источниками имеет вид [12]:

$$c\rho \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = -\operatorname{div}\vec{q} + q_0, \quad (1)$$

где c – теплоемкость; ρ – плотность; T – температура; t – время; x – пространственная координата; q_0 – мощность внутренних источников.

Закон Фурье имеет вид:

$$\vec{q} = -\lambda \operatorname{grad} T. \quad (2)$$

При постоянных теплофизических свойствах ($\lambda = \text{const}$) справедлива запись:

$$c_p \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = -\lambda \operatorname{div}(\operatorname{grad}T) + q_0. \quad (3)$$

Учитывая, что $\operatorname{div}(\operatorname{grad}T) = \Delta T = \nabla^2 T$, то уравнение (3) примет вид:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a \Delta T + \frac{q_v}{c_p}, \quad (4)$$

где a – температуропроводность.

Записывая уравнение (4) в декартовой системе координатах, получим:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + \frac{q_0}{c_p}. \quad (5)$$

Согласно принятой схеме теплообмена (рис.1) краевые условия имеют вид:

$$T(x,0) = T_0; \quad (6)$$

$$\frac{\partial T(l,t)}{\partial x} = 0; \quad (7)$$

$$T(0,t) = T_{\text{ст}}. \quad (8)$$

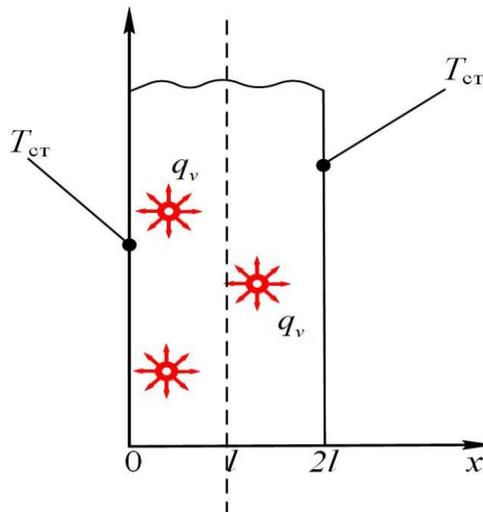


Рисунок 1 – Схема теплообмена

Согласно условиям задачи, мощность внутреннего источника теплоты изменяется по линейному закону.

Введем безразмерные параметры:

$$\Theta = \frac{T - T_0}{T_{\text{ст}} - T_0}; \quad \xi = \frac{x}{l}; \quad \text{Fo} = \frac{at}{l^2}; \quad \text{Po} = \frac{q_0 l^2}{\lambda(T_{\text{ст}} - T_0)}. \quad (9)$$

Тогда задача (5) – (8) с учетом безразмерных параметров примет вид:

$$\frac{\partial \Theta(\xi, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, \text{Fo})}{\partial \xi^2} + \text{Po}(1 - \xi) \quad (0 < \text{Fo} < \text{Fo}_1; \quad 0 < \xi < q(\text{Fo})); \quad (10)$$

$$\Theta(0, \text{Fo}) = 1; \quad (11)$$

$$\frac{\partial \Theta(1, \text{Fo})}{\partial \xi} = 0; \quad (12)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 0. \quad (13)$$

Численное решение

Решение задачи (5) – (8) осуществляется методом конечных разностей [13,14]. Основой данного метода является введение пространственно – временной сетки с шагами по пространственной координате $\Delta\xi$ и по времени ΔFo . Принимается следующая сетка:

$$\xi_i = i\Delta\xi, \quad i = \overline{0, I}; \quad Fo_k = k\Delta Fo, \quad k = \overline{0, K}, \quad (14)$$

где I, K – число шагов по координатам ξ, Fo .

Согласно выбранному методу на (14) вводятся сеточные функции $\Theta_i^k = \Theta(\xi_i, Fo_k)$. Приняв явную разностную схему решения для задачи (5) – (8), математическая постановка примет вид:

$$\frac{\Theta_i^{k+1} - \Theta_i^k}{\Delta Fo} = \frac{\Theta_{i-1}^k - 2\Theta_i^k + \Theta_{i+1}^k}{\Delta\xi^2} + Po(1 - \xi_i); \quad (15)$$

$$\Theta_0^k = 1; \quad (16)$$

$$\frac{\Theta_I^k - \Theta_{I-1}^k}{\Delta\xi} = 0; \quad (17)$$

$$\Theta_i^0 = 0. \quad (18)$$

Результаты

На Рисунке 2 – представлена зависимость распределения безразмерной температуры вдоль пространственной координаты ξ . Из анализа данной зависимости видно, что с течением времени в следствие действия линейного внутреннего источника значение температуры возрастает.

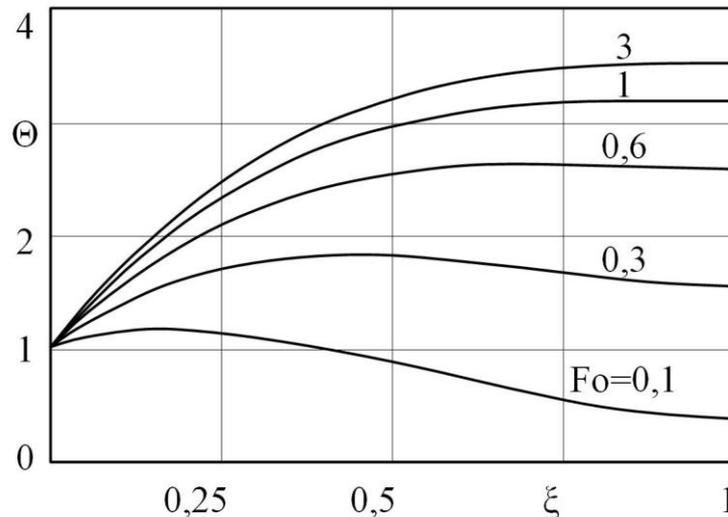


Рисунок 2 – Распределение температуры по координате ξ при значении внутреннего источника $Po = 15$

На Рисунке 3 представлено распределение температуры Θ в зависимости от безразмерного времени Fo . С течением времени наблюдается выход безразмерной температуры на стационарное значение.

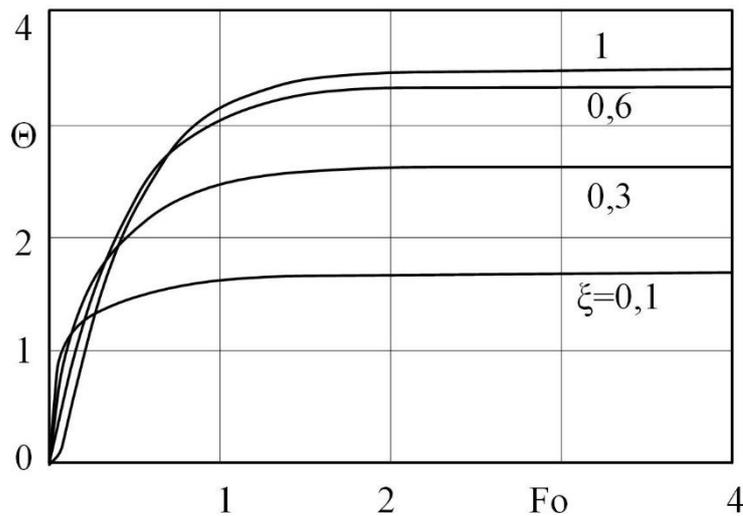


Рисунок 3 – Распределение температуры во времени при значении внутреннего источника $Po = 15$.

На Рисунке 4 представлено изменение безразмерной температуры по толщине пластины при значениях критерия Померанцева $Po = 5...20$ и постоянном значении $Fo = 0,5$. Критерий Померанцева характеризует мощность внутреннего источника теплоты. С увеличением Po наблюдается возрастание значения безразмерной температуры Θ . Так, при одинаковых значениях $\xi = 0,5$ и $Fo = 0,5$, значение безразмерной температуры при $Po = 5$ и $Po = 10$ соответственно равны $\Theta = 1,274$ и $\Theta = 1,81$.

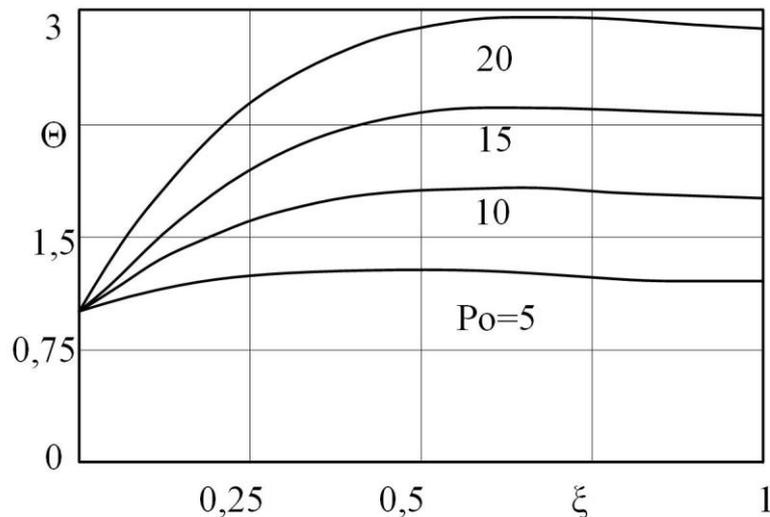


Рисунок 4 – Распределение температуры по толщине пластины при различных значениях критерия Померанцева

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 21-79-00047, <https://rscf.ru/project/21-79-00047/>)

Список литературы

1. Васильева М. В., Стальнов Д. А. Математическое моделирование термомеханического состояния тепловыделяющего элемента / ЖУРНАЛ Вестник Северо-Восточного федерального университета им. М. К. Аммосова, 2016. С. 45-59.
2. М. В. Васильева, П. Е. Захаров, П. В. Сивцев, Д. А. Спиридонов. Численное моделирование задач термоупругости для конструкции с внутренним источником, Математические заметки СВФУ, 2017, том 24, выпуск 3, С. 52–64.
3. Амосова Е.В., Шишкин А.В. Численный расчет распределения температурного поля в цилиндрическом твэле с учетом эксцентриситета топливной таблетки и переменных теплофизических характеристик материалов // Международная мультikonференция по промышленной инженерии и современным технологиям 2020 г. (FarEastCon). - IEEE, 2020. - С. 1-5.
4. R.K.Abdul Razak, Asif Afzal, A.D.Mohammed Samee, M.K.Ramis. Effect of cladding on thermal behavior of nuclear fuel element with non-uniform heat generation // Progress in Nuclear Energy. – 2019. – Vol. 111. – С. 1-14.
5. N. Massarotti, P. Nithiarasu, Pradip Dutta and C. Ranganyakalu. «EFFECT OF VARIABLE THERMAL CONDUCTIVITY ON HEAT TRANSFER CHARACTERISTICS OF A NUCLEAR FUEL ELEMENT». Fifth International Conference on Computational Methods for Thermal Problems. THERMACOMP, 2018, INDIA.
6. Supriyo Bhattacharya, Souvik Nani, Sunando DasGupta Sirshendu De. Analytical solution of transient heat transfer with variable source for applications in nuclear reactors // International Communications in Heat and Mass Transfer. Volume 28, № 7, 2001, pp. 1005-1013.
7. M.G. Sobamowo. Analysis of convective longitudinal fin with temperature-dependent thermal conductivity and internal heat generation //Alexandria Engineering Journal. – 2017. – Vol. 56. – №. 1. – pp. 1-11.
8. Кудинов В.А., Кудинов И.В. Методы решения параболических и гиперболических уравнений/ Под ред. Э.М. Карташова. - М.: Книжный дом «ЛИБРИКОМ», 2012.-280 с.
9. Eremin, A. V., Gubareva, K. V., Pyasov, A. A., Trubitsyn, K. V., Iglin, P. V. (2020, March). The study of the heat transfer process in bodies with internal heat sources of variable power. In IOP Conference Series: Materials Science and Engineering (Vol. 791, No. 1, p. 012009). IOP Publishing.
10. Kudinov I. V., Kotova E. V., Kudinov V. A. A method for obtaining analytical solutions to boundary value problems by defining additional boundary conditions and additional sought-for functions //Numerical Analysis and Applications. – 2019. – Vol. 12. – №. 2. – pp. 126-136.
11. Кот В. А. Метод граничных характеристик в задачах теплопроводности на основе интеграла теплового баланса //Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-технических наук. – 2016. – №. 2. – С. 54-65.
12. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высш. Школа, 1967.
13. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченкова Н.В. Вычислительные методы для инженеров: Учеб. пособие. — М.: Высш. шк., 1994. — 544 с.
14. Гадиева С. С., Гахраманов П. Ф. Применение методов конечных разностей для решения модельных уравнений тепломассопереноса //Вестник Дагестанского государственного университета. Серия 1: Естественные науки. – 2017. – Т. 32. – №. 4. – С. 38-46.

References

1. Vasil'eva M. V., Stal'nov D. A. Matematicheskoe modelirovanie termomekhanicheskogo sostoyaniya teplovydelyayushchego elementa / ZHURNAL Vestnik Severo-Vostochnogo federal'nogo universiteta im. M. K. Ammosova, 2016.pp 45-59 .
2. M. V. Vasil'eva, P. E. Zaharov, P. V. Sivcev, D. A. Spiridonov. CHislennoe modelirovanie zadach termouprugosti dlya konstrukcii s vnutrennim istochnikom, Matematicheskie zametki SVFU, 2017, tom 24, vypusk 3,pp 52–64.
3. Amosova E.V., SHishkin A.V. CHislennyj raschet raspredeleniya temperaturnogo polya v cilindricheskom tvele s uchetom ekscentrisiteta toplivnoj tabletki i peremennyh teplofizicheskikh harakteristik materialov // Mezhdunarodnaya mul'tikonferenciya po promyshlennoj inzhenerii i sovremennym tekhnologiyam 2020 g. (FarEastCon). - IEEE, 2020. - pp. 1-5.
4. R.K.Abdul Razak, Asif Afzal, A.D.Mohammed Samee, M.K.Ramis. Effect of cladding on thermal behavior of nuclear fuel element with non-uniform heat generation // Progress in Nuclear Energy. – 2019. – Vol. 111. – pp 1-14.
5. N. Massarotti, P. Nithiarasu, Pradip Dutta and C. Ranganyakalu. «EFFECT OF VARIABLE THERMAL CONDUCTIVITY ON HEAT TRANSFER CHARACTERISTICS OF A NUCLEAR FUEL ELEMENT». Fifth International Conference on Computational Methods for Thermal Problems. THERMACOMP, 2018, INDIA.
6. Supriyo Bhattacharya, Souvik Nani, Sunando DasGupta Sirshendu De. Analytical solution of transient heat transfer with variable source for applications in nuclear reactors // International Communications in Heat and Mass Transfer. Volume 28, № 7, 2001, pp. 1005-1013.
7. M.G. Sobamowo. Analysis of convective longitudinal fin with temperature-dependent thermal conductivity and internal heat generation //Alexandria Engineering Journal. – 2017. – Vol. 56. – №. 1. – pp. 1-11.
8. Kudinov V.A., Kudinov I.V. Metody resheniya parabolicheskikh i giperbolicheskikh uravnenij/ Pod red. E.M. Kartashova. - M.: Knizhnyj dom «LIBRIKOM», 2012.-280 P.
9. Eremin, A. V., Gubareva, K. V., Ilyasov, A. A., Trubitsyn, K. V., Iglin, P. V. (2020, March). The study of the heat transfer process in bodies with internal heat sources of variable power. In IOP Conference Series: Materials Science and Engineering (Vol. 791, No. 1, p. 012009). IOP Publishing.
10. Kudinov I. V., Kotova E. V., Kudinov V. A. A method for obtaining analytical solutions to boundary value problems by defining additional boundary conditions and additional sought-for functions //Numerical Analysis and Applications. – 2019. – Vol. 12. – №. 2. – pp. 126-136.
11. Kot V. A. Metod granichnyh harakteristik v zadachah teploprovodnosti na osnove integrala teplovogo balansa //Izvestiya Nacional'noj akademii nauk Belarusi. Seriya fiziko-tekhnicheskikh nauk. – 2016. – №. 2. – pp. 54-65.
12. Lykov A.V. Teoriya teploprovodnosti. M. : Vyssh. SHkola, 1967.
13. Amosov A.A., Dubinskij YU.A., Kopchenova N.V. Vychislitel'nye metody dlya inzhenerov: Ucheb. posobie. — M.: Vyssh. shk., 1994. — 544 P.
14. Gadieva S. S., Gahramanov P. F. Primenenie metodov konechnyh raznostej dlya resheniya model'nyh uravnenij teplomassoperenosa //Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1: Estestvennyye nauki. – 2017. – Т. 32. – №. 4. – pp. 38-46.