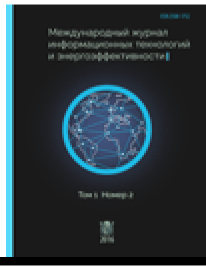
Букачев Д.С. Об одном исключительном случае первой основной краевой задачи типа Римана в классах бианалитических функций для областей с аналитической границей // Международный журнал информационных технологий и энергоэффективности. – 2016. – Т.1 №2 с. 2-7

ОТКРЫТАЯ НАУКА
издательство

Международный журнал информационных технологий и энергоэффективности

Сайт журнала: http://www.openaccessscience.ru/index.php/ijcse/



УДК 517.968.23

ОБ ОДНОМ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОМ СЛУЧАЕ ПЕРВОЙ ОСНОВНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА РИМАНА В КЛАССАХ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ С АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГРАНИЦЕЙ

Букачев Д.С.

ФГБОУ ВО Смоленский государственный университет, Смоленск, Россия (21400, г. Смоленск, ул. Пржевальского, 4), e-mail: dsbuka@yandex.ru

Статья посвящена исследованию первой основной двухэлементной краевой задачи типа Римана для бианалитических функций. Получены условия нётеровости рассматриваемой задачи и метод её решения в случае одного класса областей с аналитической границей.

Ключевые слова: бианалитическая функция, кусочно бианалитическая функция, аналитические компоненты, линия скачков, краевая задача типа Римана, условие нётеровости.

ON A EXCEPTIONAL CASE OF THE FIRST BASIC BOUNDARY VALUE PROBLEM OF RIEMANN TYPE IN A CLASS BIANALYTICAL FUNCTION FOR A DOMAIN WITH ANALYTICAL BOUNDARY

Bukachev D.S.
Federal State Educational Institution of Higher Education Smolensk State University, Smolensk, Russia (21400, Smolensk, street Przewalski, 4), e-mail: dsbuka@yandex.ru

The article is devoted the first basic two-element boundary value problem of Riemann type for bianalytical functions. The conditions under which the problem is Noetherian were discovered and the method of its solution in the case of one class of domains with analytical boundary was found.

Keywords: bianalytical function, sectionally bianalytical function, analytical components, line of jumps, boundary value problem of Riemann type, conditions of a problem being a Noetherian one.

В настоящее время системы массового обслуживания получили весьма широкое распространение. К ним относятся системы различного масштаба и структуры: транспортные, информационные системы, системы бытового обслуживания. Несмотря на предметно-структурное различие, их объединяет общность математических моделей и методов исследования. Оптимизация производства и повышение эффективности обслуживания информационных систем являются перманентно актуальными задачами, поэтому исследование характеристик таких систем имеет высокую научно-практическую ценность.

При решении ряда задач менеджмента и теории массового обслуживания возникает необходимость исследования граничных задач для аналитических функций комплексного переменного и их обобщений [2, 3].

Следует отметить, что как в России, так и за ее пределами (Беларусь, Германия, Китай, КНДР, Украина, Черногория и др.) интенсивно изучаются краевые задачи для различных обобщений аналитических функций (таких как, например, бианалитические и метааналитические функции). Значительный вклад в развитие данного направления внесли И.А. Бикчантаев, А.В. Бицадзе, Н.П. Векуа, В.А. Габринович, М.П. Ганин, Ф.Д. Гахов [1], В.И. Жегалов, К.М. Расулов [4], В.С. Рогожин, Р.С. Сакс, И.А. Соколов, Чикин Л.А. [6], M. Canak, B. Damjanovich, C.R. Shoe и другие известные математики.

Настоящая статья посвящена исследованию одного исключительного случая двухэлементной краевой задачи типа Римана для бианалитических функций с аналитической линией скачков.

Пусть L – простой замкнутый аналитический контур, делящий расширенную комплексную плоскость $\overline{C}$ на две области: внутреннюю T^{+} и внешнюю T^{-}.

В дальнейшем будем в основном пользоваться терминологией и обозначениями, принятыми в [4].

Требуется найти все кусочно бианалитические функции $F(z)=\{F^{+}(z),F^{-}(z)\}$ *класса* $A_2(T^{\pm})\cap H^{(2)}(L)$, *исчезающие на бесконечности и удовлетворяющие на границе* L *следующим краевым условиям:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F^{+}(t)}{\partial x}=G_1(t)\dfrac{\partial F^{-}(t)}{\partial x}+g_1(t), \\ \dfrac{\partial F^{+}(t)}{\partial y}=G_2(t)\dfrac{\partial F^{-}(t)}{\partial y}+ig_2(t), \end{cases} \tag{1}$$

где $G_s(t)=\dfrac{\prod\limits_{k=1}^{\mu_s}(t-\alpha_{sk})^{m_{sk}}}{\prod\limits_{j=1}^{\nu_s}(t-\beta_{sj})^{p_{sj}}}G_{s1}(t)$, $s=1,2$; α_{sk} и β_{sj} – *точки кривой* L; $\mu_s,\nu_s,m_{sk},p_{sj}\in N_0$;

$G_{s1}(t)$, $g_s(t)$ – *заданные на* L *функции, причем* $G_{s1}(t)\in H^{(1)}(L)$, $G_{s1}(t)\neq 0$ *на* L. Множитель i при $g_2(t)$ введен для удобства в дальнейших обозначениях.

Следуя [4], рассмотренную задачу будем *называть первой основной краевой задачей типа Римана* для бианалитических функций или, для краткости, задачей $R_{1,2}$.

Отметим, что в том случае, когда $L=\{t:|t|=1\}$, данная задача исследована, например, в [5]. Целью настоящей работы является построение алгоритма решения задачи $R_{1,2}$ в указанной выше постановке и обобщение результатов, полученных в [5].

Известно (см., например, [1], [4]), что всякую исчезающую на бесконечности кусочно бианалитическую функцию $F(z)$ с линией скачков L можно представить в виде

$$F(z)=\begin{cases} F^{+}(z)=\varphi_0^{+}(z)+\bar{z}\varphi_1^{+}(z), & z\in T^{+}, \\ F^{-}(z)=\varphi_0^{-}(z)+\bar{z}\varphi_1^{-}(z), & z\in T^{-}, \end{cases} \tag{2}$$

где $\varphi_s^{+}(z)$ и $\varphi_s^{-}(z)$ – аналитические соответственно в T^{+} и T^{-} функции, для которых выполняются условия $\prod\{\varphi_s^{-},\infty\}\geq s+1$, s=0, 1.

Существенным является тот факт, что всякую простую аналитическую дугу L на комплексной плоскости можно задавать с помощью так называемого характеристического уравнения (см., например, [4]):

$$\bar{z}=G(z),\ z\in L, \tag{3}$$

где $G(z)$ есть функция, аналитическая в некоторой окрестности $\Delta(L)$ дуги L. Функцию $G(z)$ часто называют функцией Шварца аналитической дуги L, а уравнение (3) – уравнением Шварца дуги L.

В настоящей статье рассмотрим случай, когда $G(z)$ есть рациональная функция вида:

$$G(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}, \tag{4}$$

где $P(z)$ и $Q(z)$ – полиномы.

Для определенности будем считать, что начало координат лежит внутри контура L. Тогда многочлены $P(z)$ и $Q(z)$ должны удовлетворять условиям:

$$P(z)\neq 0 \text{ и } Q(z)\neq 0 \text{ на } L.$$

Воспользовавшись представлением (2) и учитывая соотношения

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial z}+\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}, \\ \dfrac{\partial}{\partial y}=i\left(\dfrac{\partial}{\partial z}-\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}\right), \end{cases}$$

из (1) получим

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi_0^{+}(t)}{dt}+\varphi_1^{+}(t)+\bar{t}\,\dfrac{d\varphi_1^{+}(t)}{dt}=G_1(t)\left[\dfrac{d\varphi_0^{-}(t)}{dt}+\varphi_1^{-}(t)+\bar{t}\,\dfrac{d\varphi_1^{-}(t)}{dt}\right]+g_1(t), \\ \dfrac{d\varphi_0^{+}(t)}{dt}-\varphi_1^{+}(t)+\bar{t}\,\dfrac{d\varphi_1^{+}(t)}{dt}=G_2(t)\left[\dfrac{d\varphi_0^{-}(t)}{dt}-\varphi_1^{-}(t)+\bar{t}\,\dfrac{d\varphi_1^{-}(t)}{dt}\right]+g_2(t). \end{cases}$$

С учетом того, что на L выполняется равенство $\bar{t}=G(t)$, будем иметь:

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi_0^{+}(t)}{dt}+\varphi_1^{+}(t)+G(t)\dfrac{d\varphi_1^{+}(t)}{dt}=G_1(t)\left[\dfrac{d\varphi_0^{-}(t)}{dt}+\varphi_1^{-}(t)+G(t)\dfrac{d\varphi_1^{-}(t)}{dt}\right]+g_1(t), \\ \dfrac{d\varphi_0^{+}(t)}{dt}-\varphi_1^{+}(t)+G(t)\dfrac{d\varphi_1^{+}(t)}{dt}=G_2(t)\left[\dfrac{d\varphi_0^{-}(t)}{dt}-\varphi_1^{-}(t)+G(t)\dfrac{d\varphi_1^{-}(t)}{dt}\right]+g_2(t). \end{cases} \tag{5}$$

Домножив равенства (5) на $Q(z)$ и вводя в рассмотрение вспомогательные функции

$$Q(z)\left(\frac{d\varphi_0^{\pm}(z)}{dz}+\varphi_1^{\pm}(z)\right)+P(z)\frac{d\varphi_1^{\pm}(z)}{dz}=\Phi_1^{\pm}(z), \tag{6}$$

$$Q(z)\left(\frac{d\varphi_0^{\pm}(z)}{dz}-\varphi_1^{\pm}(z)\right)+P(z)\frac{d\varphi_1^{\pm}(z)}{dz}=\Phi_2^{\pm}(z), \tag{7}$$

перепишем краевые условия (5) в виде:

$$\Phi_1^{+}(t)=G_1(t)\Phi_1^{-}(t)+g_1(t)Q(t), \tag{8}$$

$$\Phi_2^{+}(t)=G_2(t)\Phi_2^{-}(t)+g_2(t)Q(t). \tag{9}$$

Равенства (8) и (9) представляют собой краевые условия задач Римана для аналитических функций, где $\Phi_s^{\pm}(z)\in A(T^{\pm})$ (s=1, 2) – искомые кусочно аналитические функции.

Определим поведение функций $\Phi_1^{\pm}(z)$ и $\Phi_2^{\pm}(z)$ на бесконечности. Согласно представлению (2), $\prod\{\varphi_s^{-},\infty\}\geq s+1$ (s=0, 1), на основании чего получим:

$$\prod\left\{\frac{d\varphi_0^{-}(z)}{dz},\ \infty\right\}\geq 2,\quad \prod\left\{\frac{d\varphi_1^{-}(z)}{dz},\ \infty\right\}\geq 3.$$

Тогда порядок функций $\Phi_1^{-}(z)$ и $\Phi_2^{-}(z)$ на бесконечности можно оценить снизу числом:

$$\prod\{\Phi_s^{-}(z),\ \infty\}\geq \Pi_\infty \ (s=1,\ 2),$$

где

$$\Pi_\infty = Min\{2-\deg Q(z),\ 3-\deg P(z)\}. \tag{10}$$

Решая систему (6) – (7) относительно функций $\varphi_s^{\pm}(z)$ (s=0, 1) с дополнительным условием $F(0)=0$, получим:

$$\varphi_1^{\pm}(z)=\frac{\Phi_1^{\pm}(z)-\Phi_2^{\pm}(z)}{2Q(z)}, \tag{11}$$

$$\varphi_0^{\pm}(z)=\int\limits_{\Gamma^{\pm}}\left[\Phi_1^{\pm}(\xi)+\Phi_2^{\pm}(\xi)-2P(\xi)\frac{d\varphi_1^{\pm}(\xi)}{d\xi}\right]\frac{d\xi}{2Q(\xi)}, \tag{12}$$

где Γ^{+} – произвольная гладкая кривая, лежащая в T^{+} и соединяющая точку $z=0$ и произвольную точку $z\in T^{+}$, Γ^{-} – произвольная гладкая кривая, лежащая в T^{-} и соединяющая точку $z=z_0$ и произвольную точку $z\in T^{-}$.

Пусть α – один из корней многочлена $Q(z)$ кратности n, лежащий в T^{+} (T^{-}), Γ_0 – произвольная окружность, с центром в точке α, не содержащая внутри себя других корней многочлена $Q(z)$ и полностью лежащая в T^{+} (T^{-}). Тогда в силу аналитичности функций $\varphi_s^{\pm}(z)$ (s=0, 1) должны выполняться равенства:

$$\int\limits_{\Gamma_0}\frac{\Phi_1(\xi)-\Phi_2(\xi)}{(\xi-\alpha)^k}d\xi=0, \tag{13}$$

$$\int\limits_{\Gamma_0}\left[\Phi_1(\xi)+\Phi_2(\xi)-\frac{2P(\xi)}{Q^2(\xi)}\left(\left(\frac{d\Phi_1(\xi)}{d\xi}-\frac{d\Phi_2(\xi)}{d\xi}\right)Q(\xi)-\left(\Phi_1(\xi)-\Phi_2(\xi)\right)\frac{dQ(\xi)}{d\xi}\right)\right]\frac{d\xi}{(\xi-\alpha)^k}=0, \tag{14}$$

где $k=1,\dots,n$, $\Phi_s(z)=\Phi_s^{\pm}(z)$ (s=0, 1) в зависимости от того, какой области (T^{+} или T^{-} соответственно) принадлежит α.

Принадлежность функции $F(z)=\left\{F^{+}(z),F^{-}(z)\right\}$ классу $A_2(T^{\pm})\cap H^{(2)}(L)$ означает (см. [4]) , что граничные значения аналитических компонент $\varphi_s^{\pm}(z)$ (s=0, 1) принадлежат классу $H^{(1)}(L)$. Из равенств (6) и (7) немедленно следует, что граничные значения неизвестных кусочно аналитических функций $\Phi_1^{\pm}(z)$ и $\Phi_2^{\pm}(z)$ должны принадлежать классу $H(L)$. Дифференцированием из (11) получим:

$$\frac{d\varphi_1^{\pm}}{dz}=\frac{1}{Q^2(z)}\left(\left(\frac{d\Phi_1^{\pm}(z)}{dz}-\frac{d\Phi_2^{\pm}(z)}{dz}\right)Q(z)-\left(\Phi_1^{\pm}(z)-\Phi_2^{\pm}(z)\right)\frac{dQ(z)}{dz}\right).$$

Таким образом, для того, чтобы $\varphi_1^{\pm}(z)\in H^{(1)}(L)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\Phi_s^{\pm}(z)\in H(L),\ (s=0,\ 1), \tag{15}$$

$$\frac{d\Phi_1^{\pm}(z)}{dz}-\frac{d\Phi_2^{\pm}(z)}{dz}\in H(L). \tag{16}$$

Из (12) следует, что выполнения условий (15) и (16) достаточно и для того, чтобы функция $\varphi_0^{\pm}(z)$ также принадлежала $H^{(1)}(L)$. В дальнейшем потребуем, чтобы

$$\Phi_s^{\pm}(z)\in H^{(1)}(L),\ (s=0,\ 1). \tag{17}$$

Этого будет достаточно для того, чтобы искомая кусочно бианалитическая функция $F(z)=\left\{F^{+}(z),F^{-}(z)\right\}$ принадлежала классу $A_2(T^{\pm})\cap H^{(2)}(L)$.

Для решения задач (8) – (9) воспользуемся методом, изложенным в [6]. Действуя согласно [6], выберем для решения класс H_0 (функции этого класса ограничены). Налагая на $G_{s1}(t)$ и $\prod_{j=1}^{\nu_s}(t-\beta_{sj})^{p_{sj}}g_s(t)$ дополнительные условия, добиваемся, чтобы решения задач (8) и (9) попали в класс $H^{(1)}(L)$.

Таким образом, удалось получить следующий основной результат:

Теорема 1. *Пусть* $L=\{t:\bar{t}=\dfrac{P(t)}{Q(t)}\}$, где $P(t)$ и $Q(t)$ – многочлены, $G_{s1}(t)\in H^{(1)}(L)$, $\prod_{j=1}^{\nu_s}(t-\beta_{sj})^{p_{sj}}g_s(t)\in H^{(1)}(L)$, $G_{s1}(t)\neq 0$ *на* L, *причем функции* $G_{s1}(t)$ *и* $\prod_{j=1}^{\nu_s}(t-\beta_{sj})^{p_{sj}}g_s(t)$ *в исключительных точках* α_{sk} *и* β_{sj} *имеют производные порядков* $m_{sk}+2$ *и* $p_{sj}+2$ *соответственно, удовлетворяющие условию Гельдера. Тогда решение краевой задачи* $R_{1,2}$ *сводится к решению двух обычных задач Римана* (8) *и* (9) *в исключительном случае в классе* $A(T^{\pm})\cap H^{(1)}(L)$ *относительно кусочно аналитических функций* $\Phi_1^{\pm}(z)$ *и* $\Phi_2^{\pm}(z)$, *имеющих на бесконечности порядок не ниже* Π_∞ (10); *если разрешима каждая из задач Римана* (8) *и* (9) *в указанном классе и, кроме того, выполняются условия* (13) и (14), *то разрешима и задача* $R_{1,2}$, *причем решение задачи* $R_{1,2}$ *можно восстановить по формулам* (2), (11), (12).

Следствие 1. *При выполнении условий теоремы* 1 *задача* $R_{1,2}$ *в рассматриваемом случае является нётеровой*.

Результаты, полученные в рамках настоящей работы, могут оказаться полезными для математиков-прикладников, инженеров, специалистов в теории массового обслуживания и теории вероятностей.

Список литературы

1. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977.
2. Коэн Д.Б. Граничные задачи в теории массового обслуживания. – М.: Мир, 1987.
3. Кулиев В.Д., Сендеров В.Л., Юрченко Т.И., Лагоша Б.А., Озик В.В. Менеджмент. Управленческие решения : учеб. пособие. М.: Изд-во МГОУ, 2006.
4. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. – Изд-во СГПУ, Смоленск, 1998.
5. Расулов К.М., Букачев Д.С. О решении одной краевой задачи типа Римана в классах бианалитических в круге функций в исключительном случае // Системы компьютерной математики и их приложения: матер. междунар. науч. конференц. – 2006. – Вып. 7. – С. 120 – 122.
6. Чикин Л.А. Особые случаи краевой задачи Римана и сингулярных интегральных уравнений, Уч. зап. Казанского ун-та, т. 113, № 10, 1953.

References

1. Gahov F.D. Kraevye zadachi. – M.: Nauka, 1977.
2. Koehn D.B. Granichnye zadachi v teorii massovogo obsluzhivaniya. – M.: Mir, 1987.
3. Kuliev V.D., Senderov V.L., YUrchenko T.I., Lagosha B.A., Ozik V.V. Menedzhment. Upravlencheskie resheniya : ucheb. posobie. M.: Izd-vo MGOU, 2006.
4. Rasulov K.M. Kraevye zadachi dlya polianaliticheskih funkcij i nekotorye ih prilozheniya. – Izd-vo SGPU, Smolensk, 1998.
5. Rasulov K.M., Bukachev D.S. O reshenii odnoj kraevoj zadachi tipa Rimana v klassah bianaliticheskih v kruge funkcij v isklyuchitel'nom sluchae // Sistemy komp'yuternoj matematiki i ih prilozheniya: mater. mezhdunar. nauch. konferenc. – 2006. – Vyp. 7. – S. 120 – 122.
6. CHikin L.A. Osobye sluchai kraevoj zadachi Rimana i singulyarnyh integral'nyh uravnenij, Uch. zap. Kazanskogo un-ta, t. 113, № 10, 1953.