Пучков Ю.И. Корректирующий код с повторением // Международный журнал информационных технологий и энергоэффективности. – 2020. – Т. 5 № 1(15) с. – 8-13

ОТКРЫТАЯ НАУКА
издательство

Международный журнал информационных технологий и энергоэффективности

Сайт журнала:
http://www.openaccessscience.ru/index.php/ijcse/

УДК 681.3.042

# КОРРЕКТИРУЮЩИЙ КОД С ПОВТОРЕНИЕМ

**Пучков Ю.И.**
*Филиал ФГБУ ВО « НИУ «МЭИ» в г. Смоленске, Смоленск, Россия*
*(214013, г. Смоленск, Энергетический проезд,1), e-mail:* puchkov304@mail.ru

**В статье рассматривается построению и декодированию кода, представляющего собой корректирующий код, исправляющий ошибки, и его повторение Полученный код исправляет вдвое больше ошибок, чем исходный код. Полученный код, по сравнению с кодами аналогичными по корректирующей способности, незначительно проигрывает в скорости, но имеет существенно более простой алгоритм декодирования.**

Ключевые слова: код, кодирование, декодирование, корректирующая способность, конструктивное расстояние, скорость кода.

# THE CORRECTING CODE WITH REPEAT

**Puchkov Yu.I.**

*Smolensk Branch of the National Research University "Moscow Power Engineering Institute", Smolensk, Russia (214013, Smolensk, Energetichesky proezd, 1), e-mail:* puchkov304@mail.ru

**The article looks at building and decoding code, which is a corrective code that corrects errors, and repeats it, corrects twice as many errors as the source code. The resulting code, compared to codes similar in corrective ability, slightly loses in speed, but has a significantly simpler decoding algorithm**

Keywords: code, coding, decoding, corrective ability, constructive distance, code speed

Коды с повторением всегда рассматривались как один из вариантов построения корректирующих кодов, обнаруживающих одиночные ошибки и какую-то часть ошибок большей кратности. Такие коды применяются в системах, где эффективность использования канала связи не является актуальной. Например, в системах автоматики и телемеханики на железнодорожном транспорте [1]. В зависимости от типа ошибок в канале связи применяют повторение прямо или инверсно всей комбинации кода или каждого символа исходного кода. Декодирование кода заключается в сравнении обеих частей кода (инверсия второй части кода, если она применялась, предварительно восстанавливается). Если одноимённые разряды обеих частей кода не совпадают, то это воспринимается как обнаружение ошибки.

В корректирующем систематическом коде выделяют $k$ информационных и $m$ проверочных разрядов. Общая дина кодовой комбинации $n= k + m$. Скорость кода $R= k / n$. Число информационных разрядов выбирают из условия $M \le 2^k$. Если выполняется равенство, то код будет оптимальным, а если неравенство, то код называют укороченным. Передаваемая информация заключена только в информационных разрядах кода. В кодах с повторением эти разряды передаются дважды (в каждой половине кода). Если знать в какой половине кода информационные разряды не содержат ошибки или ошибка в них может быть легко исправлена, то эти разряды следует передать потребителю, предварительно исправив возможную ошибку. Это упрощает алгоритм декодирование кода с повторением.

Код с повторением является корректирующим. Он состоит из двух частей. Длина $n= n1+ n2$, где $n1$ и $n2$ , соответственно, длины первой и второй его частей. Обычно $n1 = n2$. За основу берётся некоторый исходный код, являющийся первой частью кода с повторением, и затем он повторяется, образую вторую часть кода. Известно [2], что корректирующая способность кода определяется его минимальным кодовым расстоянием $d_{мин}$, называемое также конструктивным расстоянием или просто « кодовым расстоянием». Если исходный код будет иметь кодовое расстояние $d_{мин}$ то, построенный на его основе код с повторением будет иметь уже рас стояние $2d_{мин}$. Следовательно, его корректирующая способность будет практически вдвое выше, чем у исходного кода. Если код предназначен для исправления $s$ ошибок, то его конструктивное расстояние должно быть равно $d_{мин} =2\ s\ +1$, то есть будет нечётным. Как следствие конструктивное расстояние кода с повторением окажется чётным. Что бы оно оказалось нечётным, необходимо увеличить конструктивное расстояние одной половины кода на 1, что всегда можно сделать, добавив в ней один разряд с проверкой на чётность.

Рассмотрим пример. Положим, исходная комбинация представляет собой 5-и разрядную комбинацию неизбыточного кода – 10110. Полученная на её основе комбинации кода с повторением будет иметь вид 1011010110. Если она принята без ошибки, то результат сравнения частей кода (поразрядное сложение по модулю 2 первой и второй частей кода) даст нулевую комбинацию 10110 + 10110 = 00000. Если в одной из частей кода один разряд был принят не верно, то в результате сравнения частей кода получим в соответствующем разряде 1. Но в какой части кода произошла эта ошибка мы определить не сможем. Известно, что для кода, обнаруживающего $r$ ошибок, должно выполняться условие $d_{мин} = r +1$. У рассматриваемого кода с повторением $d_{мин} = 2$ и, следовательно, получаем $r = 1$. Добавим, например, во вторую часть кода один разряд проверки на чётность. Получим комбинацию 10110101101. На приёмной стороне осуществляется проверка на чётность второй половины кода. Если в этой части кода ошибок не было, то результат проверки на чётность будет нулевым, а если произошла одиночная ошибка, то – 1. Теперь при наличии одиночной ошибки в результате сравнения частей кода получим комбинацию из нулей и одной единице. Разряд проверки на чётность в операции сравнения не участвует. Положение единицы укажет номер искажённого разряда, а результат проверки на чётность позволит указать, в какой половине кода произошла ошибка. Для двоичного кода исправление ошибки сводиться к инверсии указанного разряда кода. Если результат проверки на чётность показывает её нарушение, а результат сравнения частей кода оказался нулевым, то это свидетельствует об ошибке именно в разряде проверки на чётность.

Видим, что достаточно просто построили код, позволяющий исправлять одиночные ошибки, при простом алгоритме декодирования. Обратим внимание на то обстоятельство, что ошибку в принципе даже не надо исправлять, а передать получателю лишь неискажённую часть кода. Заметим, что при известной безошибочной части кода на приёмной стороне можно заново сформировать, если в этом есть необходимость, переданную комбинацию кода с повторением. Указанные особенности декодирования и исправления ошибок будут справедливы и для других типов исходных кодов.

В качестве исходного кода возьмём корректирующий код. В результате получим корректирующий код с повтолрением (ККП). Нецелесообразно выбирать исходный код с чётным конструктивным расстоянием, поскольку у построенного на его основе ККП конструктивное расстояние будет так же чётным. Это не позволит приведённое выше неравенство, связывающее кратность исправляемых ошибок с конструктивным расстоянием кода, заменить на равенство. Добавим во вторую часть кода ещё один разряде проверки на чётность, тем самым увеличим не 1 её кодовое расстояние $d_{\text{мин}}$ и оно станет чётным.

Рассмотрим процесс кодирования и декодирования ККП, взяв в качестве исходного кода код с кодовым расстоянием $d_{\text{мин}} = 3$, а именно, циклический код Хэмминга, исправляющий одиночные ошибки. Декодирование его осуществляется достаточно просто, поскольку к моменту окончания кодовой комбинации уже оказывается сформированной кодовая комбинация синдрома, указывающая на номер искажённого разряда. Для исправления ошибки в этом разряде достаточно подать один импульс исправления ошибки, то есть время исправления ошибки оказывается равным длине импульса считывания, которая может быть во много раз короче длительности одного импульса кодовой комбинации.

Как и в предыдущем случае ко второй части кода добавим разряд проверки на чётность. Кодовое расстояние этой части кода станет равным 4. Получим ККП с кодовым расстоянием равным 7. Код с таким кодовым расстоянием сможет исправлять тройные ошибки. То есть исходный код может исправлять только одиночные ошибки, а построенный на его основе ККП позволит исправлять уже трёхкратные ошибки. Исправление ошибок кратности большей 1 представляется достаточно сложной задачей и выполняется за ряд тактов после приёма всей кодовой комбинации.

Особенностью ККП является то обстоятельство, что исправляемые кодом ошибки распределяются между двумя его частями. И всегда найдётся часть кода, ошибки в которой не превышают корректирующей способности исходного кода. В данном случае всегда найдётся часть кода, в которой не больше одиночной ошибки, и она практически мгновенно исправляется. Тройная ошибка может поразить либо только одну часть кода, а другая часть кода безошибочной, либо в одной части кода будет одиночная ошибка, а в другой – двойная. Очевидно, одиночная ошибка и исправляется. Осталось лишь определить, какая часть кода безошибочна или имеет только одиночную ошибку. То есть ошибки кратностью больше единицы фактически не исправляются. Если возникнет необходимость безошибочного восстановления всей кодовой комбинации, то это всегда можно осуществить, имея неискажённую половину кода.

Алгоритм декодирования рассматриваемого ККП заключается в следующем. Для каждой части вычисляются их синдромы $S1$ и $S2$. Если ошибки в рассматриваемой части нет, то синдром будет равен 0, а если ошибка (одиночная или двойная) присутствует, то синдром будет отличным от нуля (обозначим такие его значения символом -1). Осуществляется проверка на чётность $P$ второй половины кода. В таблице1 рассмотрены возможные распределения ошибок по частям кода, значение синдромов S1, S2 при декодировании соответствующей части кода, результат проверки на чётность второй части кода.

Таблица1 – Пояснение к декодированию кода с $d_{\text{мин}} = 3$.

| Кратность ошибок | | 0 | 1 | | 2 | | | 3 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Распределение ошибок по частям кода | 1ч. | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 | 1 | 3 | 0 | 2 | 1 |
| | 2ч. | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 3 | 1 | 2 |
| Значение синдромов частей кода | S1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| | S2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| Результат проверки на чётность | P | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| Декодируемая часть кода | | 1,2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1,2 | 2 | 1 | 2 | 1 |

Учтено, что трёхкратная ошибка воспринимается декодирующим устройством как безошибочная, но другая (не переданная в данный момент) кодовая комбинация. В нижней строке таблицы указано, какую часть кода следует декодировать при соответствующем распределении ошибок по частям кода. Если указано 1,2, то это означает, что можно декодировать любую часть кода.

Из таблицы можно заметить, что в зависимости от ситуации с распределением ошибок по частям кода следует декодировать либо первую, либо вторую часть кода. Декодируемая половина кода или не содержит ошибок, или содержит только одиночную ошибку. Из анализа таблицы следует, что в случае совпадения чётностей у $P$ и $S2$,следует декодировать только вторую часть кода, а в остальных случаях – первую.

Рассмотренный пример позволяет сделать следующие выводы. Корректирующая способность рассмотренного ККП вдвое больше, чем у исходного кода. Ошибки исправляются не во всей кодовой комбинации, а лишь в одной её части, и кратность их не превышает корректирующуй способности исходного кода. При необходимости на приёмной стороне можно заново сформировать всю переданную комбинацию ККП, то есть, фактически исправить все ошибки в принятой кодовой комбинации. Такие коды с относительно невысокой корректирующей способностью и простым, практически не требуемым времени для декодирования можно применять в оперативных системах управления [3], в информационно-управляющих комплексах [4], в системах контроля [5]..

Технически просто решается задача декодирования БЧХ – кодов, исправляющих двукратные ошибки, если число информационных разрядов кода хотя бы на единицу было меньше числа проверочных разрядов. Этому условию удовлетворяет код (15,7),Для его декодирования используют декодер Мегитта [6]. Конструктивное расстояние этого кода равно 5. На его основе можно построить ККП, с кодовым расстоянием равным 11. Код позволит исправлять 5-и кратные ошибки. Правило декодирования: исправлять ошибки следует во второй части кода, если результат проверки на чётность совпадает с чётностью ошибки этой части кода, если не совпадает, то исправление ошибок осуществляется в первой части кода.

Декодирование кодов, исправляющих ошибки кратности больше 1 (кроме кода (15,7)), осуществляется более сложно. Вначале вычисляются синдромы, число которых соответствует максимальной кратности исправляемых кодом ошибок, на их основе составляется система нелинейных уравнений. Определяется ранг синдромной матрицы. Оставляют число уравнений равное рангу матрицы и находят их решение. По результату решения производят исправление ошибок.

Для исходных кодов, исправляющих более одной ошибки, при формировании правила декодирования ККП следует учитывать ранг матрицы синдромов. Кроме того, необходимо принять во внимание, что если число ошибок в декодируемой половине кода будет превышать её корректирующие возможности, то она будет декодирована в другую кодовую комбинацию. Например, код позволяет исправлять 5-и кратные ошибки, его $d_{мин} = 11$. При 7-и кратной ошибке принятая кодовая комбинация будет декодирована в другую комбинацию, которая, как бы предавалась, и в ней произошло 4-е ошибки (11 – 7 = 4), которые кодом и будут исправлены.

Построим на основе этого кода ККП. Такой код позволит исправлять 11-и кратные ошибки. Для определения правила выбора части кода, которую при приёме надлежит декодировать, необходимо проанализировать возможное распределение ошибок по частям кода. Фрагмент распределения при 11-и кратной ошибки приведён в таблице 2. Аналогичные таблицы были составлены и для других кратностей ошибок.

Таблица 2 – Пояснение к декодированию кода с $d_{мин}$ = 23 при 11-и кратной ошибке.

| Кратность ошибок | | 11 | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Кратность ошибок в частях кода | 1ч | 11 | 0 | 10 | 1 | 9 | 2 | 8 | 3 | 7 | 4 | 6 | 5 |
| | 2ч | 0 | 11 | 1 | 10 | 2 | 9 | 3 | 8 | 4 | 7 | 5 | 6 |
| Ранг синдромов частей кода | S1 | 0* | 0 | 1* | 1 | 2* | 2 | 3* | 3 | 4* | 4 | 5* | 5 |
| | S2 | 0 | 0* | 1 | 1* | 2 | 2* | 3 | 3* | 4 | 4* | 5 | 5* |
| Результат проверки на чётность | P | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| Декодируемая часть кода | | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |

Проведённый анализ позволяет сделать вывод, что в случае, если чётности ранга матрицы синдромов во второй части кода и результата проверки на чётность совпадают, то декодировать следует вторую часть кода. Если это условие не выполняется, то надлежит декодировать первую часть кода.

Сравним по скорости аналогичные по корректирующей способности коды ККП и БЧХ-код. Сравнение проведём для частного случая, выбрав в качестве исходного корректирующего кода БЧХ – код (31,11), позволяющий исправлять 5-и кратные ошибки. На его основе построим ККП код (63,11). В этом коде имеется 11 информационных разрядов, а все остальные разряды, включая полностью вторую часть кода, следует отнести к проверочным.. Для сравнения возьмём также укороченный БЧХ – код (58,11), полученный из полного БЧХ - кода (63,16), имеющий такое же число информационных символов и позволяющий исправлять 11-ти кратные ошибки. Скорость ККП - кода (63,11) R = 0.175, а укороченного БЧХ – кода (58,11) R =0.19, что практически соизмеримо.

Поскольку рассматриваемые коды имеют одинаковую корректирующую способность и примерно одинаковую скорость, то можно утверждать, что они имеют одинаковую вероятность возникновения ошибок. При малых по абсолютному значению вероятностях возникновения ошибки отличия меньшие порядка обычно не принимаются во внимание.

Время для декодирования обычно ограничено длительностью одного символа кода. Очевидно, что с увеличением порядка уравнений существенно вырастает число арифметических операций. Число операций при декодировании БЧХ - кода оценивается как $n^2 log_2 n$ [7]. В коде ККП с такой же корректирующей способностью ошибки распределены по двум практически равным по длине $n/2$ частям кода. Число операций для одной части кода будет равно $(n/2)^2 log_2(n/2)$ = (1/4) $n\ log_2(n-1)$, то есть в 4 раза меньше. Вычисление ранга матрицы опознавателей первой части ККП кода выполняется в процессе приёма второй части кода и на быстродействие процесса декодирования не оказывает влияния.

Коды ККП могут найти применение в автономных устройствах, где остро не стоит вопрос эффективного использования канала связи. Например, в системах передачи телемеханической информации [8], в системах обеспечения надёжности устройств[9]. Коды могут найти применение и в устройствах реального времени, где важным являются скорость декодирования и простота технической реализации декодирующих устройств при числе исправляемых ошибок не более пяти.

**Список литературы**

1. Теория передачи сигналов на железнодорожном транспорте: учебник / Г.В. Горелов и др.;под ред. Г.В. Горелова. – М.:ФГБОУ «Ученбно-методический центр по образованию на железнордорожном транспорте», 2013. — 532с.
2. Основы теории кодирования. Б. Д. Кудряшов Издательство: БХВ-Петербург, Учебники и пособия для вузов, 2016.
3. К вопросу о целесообразности применения корректирующих кодов с исправлением ошибок в командных радиолиниях управления. Ашимов Н.М., Шустик Н.А. Спецтехника и связь. 2009. № 3. С. 42-45.
4. Алгоритмы декодирования избыточных кодов в системе информационно-управляющих комплексов. Гладких А.А., Наместников С.М., Чилихин Н.Ю. REDS: Телекоммуникационные устройства и системы. 2015. Т. 5. № 1. С. 105-108.
5. Особенности применения кодов Хэмминга при организации самопроверяемых схем встроенного контроля. Сапожников В.В., Сапожников Вл.В., Ефанов Д.В., Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2018. Т. 61. № 1. С. 47-59.
6. Кларк Дж., мл., Кейн ДЖ. Кодирование с исправлением ошибок в системах цифровой связи: Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1987. – 392 с.
7. Теория кодирования / Т. Касами, Н. Токура, Е. Ивадари, Я. Ирагаки. – М.: Мир, 1978.
8. Хлынов А.А. Помехоустойчивое кодирование в каналах передачи телеметрической информации // Труды Научно-исследовательского института радио. 2015. № 2. С. 27-31.
9. Применение корректирующих способностей кодов для обеспечения отказоустойчивости. Петлеванный С.В., Сагдеев А.К. Современные наукоемкие технологии. 2007. № 4. С. 41-42

References

1. The theory of railway transmission: textbook/ G.V. Gorelov et al.; Ed. G.V. Gorelova. - Yuri Miner, 2013. 532c.
2. The basics of coding theory. B.D. Kudryashov Publishing House: BKV-Petersburg Genre: Mathematics, Programs, Textbooks and University Manuals,2016,-400s
3. On the issue of the appropriateness of using corrective codes with error correction in command radio control lines. Ashimov N.M., Shustik N.A. Special equipment and communications. 2009. No. 3. P. 42-45.
4. Algorithms for decoding redundant codes in the system of information management systems. Gladkikh A.A., Namestnikov S.M., Chilikhin N.Yu. REDS: Telecommunication devices and systems. 2015.Vol. 5. No. 1. P. 105-108.
5. Features of the application of Hamming codes in the organization of self-checking schemes of built-in control. Sapozhnikov VV, Sapozhnikov Vl.V., Efanov D.V. Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Instrument making. 2018.V. 61. No. 1. S. 47-59.
6. Clark J., Jr., Kane J. Error correction coding in digital communication systems: Per. from English - M .: Radio and communications, 1987. - 392s.
7. The coding theory / T. Kasami, N. Tokura, E. Ivadari, Y. Iragaki. — M. : World, 19
8. Khlynov A.A. Noise-resistant coding in telemetry information transmission channels // Transactions of Radio Research Institut, 2015. No. 2. P. 27-31
9. The use of corrective capabilities of codes to ensure fault tolerance. Petlevanny S.V., Sagdeev A.K. Modern high technology. 2007. No.4. P. 41-42